Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **25.9.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità di una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ in $x_0\in(a,b)$.

(ii) Dimostrare che se f é derivabile in x_0, allora é anche continua in x_0.

Risposta

(i) f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=:f'(x_0)=\begin{cases}\text{derivata}\\ \text{di } f\\ \text{in } x_0\end{cases}$$

(ii) Se f è derivabile in x_0, allora per $x\to x_0$ segue

$$f(x)-f(x_0)=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}\to f'(x_0)\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow f \text{ è continua in } x_0$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema della formula di Taylor con il resto di Lagrange.

(ii) Dare una stima dell'errore che si commette approssimando $e^{\sqrt{3}}$ con il valore $1+\sqrt{3}$.

Risposta

(i) Sia $f\in C^{n+1}(a,b)$ e siano $x,x_0\in(a,b)$. Allora $\exists\, c$ fra x e x_0 t.c.

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto di Peano}}$$

(ii) Con $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $x=\sqrt{3}$ e $n=1$ segue da (i): $\exists\, c\in(0,\sqrt{3})$ t.c.

$$e^{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}+\frac{e^c}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\Rightarrow$$

$$\left|e^{\sqrt{3}}-(1+\sqrt{3})\right|\le\frac{e^c}{2}\cdot 3\underset{e^x \text{ è crescente}}{\le}\frac{e^{\sqrt{3}}}{2}\cdot 3.$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n = 1$ per $n < 10^9$ e $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ per $n \geq 10^9$. Allora

- [ ] a a_n è definitivamente positiva
- [ ] b a_n è oscillante
- [x] c a_n è definitivamente minore di 1
- [ ] d a_n non è limitata

Risoluzione

Visto che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $a_n \leq 1$ definitivamente.

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $D \subset \mathbb{R}$ and $x \in D$. Che cosa significa che f è continua in x?

- [ ] a Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|y - x| < \delta$ per ogni $y \in D$ con $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$
- [x] b Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $y \in D$ con $|y - x| < \delta$
- [ ] c Esiste $\varepsilon > 0$ tale che per $\delta > 0$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $y \in D$ con $|y - x| < \delta$
- [ ] d Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\delta > 0$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $y \in D$ con $|y - x| < \delta$

Risoluzione

Per la definizione (alternativa) della continuità di una funzione

Esercizio 3

[4 punti]

Se $|a - 10| \leq 2$ e $|b - 10| \leq 3$, allora

- [x] a $|a - b| \leq 5$
- [ ] b $|a - b| \leq 2$
- [ ] c $|a - b| \leq -2$
- [ ] d $|a - b| \geq 1$

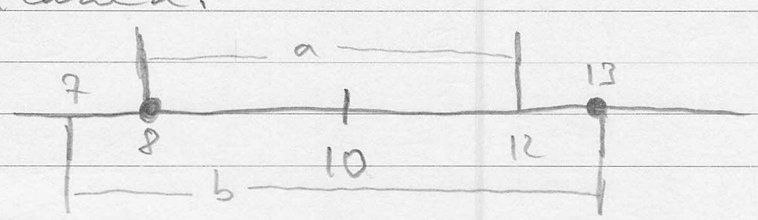
Risoluzione

$$|a-b| = |a-10+10-b| \underset{\text{disug. triangolare}}{\leq} |a-10| + |10-b|$$

$$= |a-10| + |b-10|$$

$$\leq 2+3 = 5$$

Graficamente:



$|a-10| =$ distanza tra a e 10

$|b-10| =$ distanza tra b e 10

$\Rightarrow |a-b| \leq 5$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\frac{16}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{8x^2\cos(2x) - 2\ln(1+4x^2)}^{=:\, N(x)}}{\underbrace{7x^2\tan(x^4)}_{=:\, D(x)}} \qquad 7x^2\tan(x^4) \sim 7x^2 \cdot x^4 = 7x^6$$

Risoluzione

- $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \sim \frac{t}{1} = t$ per $t \to 0 \Rightarrow \tan(x^4) \sim x^4$ per $x \to 0$
- $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4)$, $\quad o((2x)^4) = o(x^4)$
- $\ln(1+4x^2) = 4x^2 - \frac{(4x^2)^2}{2} + \frac{(4x^2)^3}{3} + o((4x^2)^3)$, $\quad o((4x^2)^3) = o(x^6)$

$$\Rightarrow N(x) = \cancel{8x^2} - \cancel{8x^2 \cdot \frac{4x^2}{2}} + 8x^2 \cdot \frac{16 \cdot x^4}{24_3} - \cancel{8x^2} - \cancel{2 \cdot \frac{16x^4}{2}} - 2\,\frac{64}{3}x^6 + o(x^6)$$

$$= \frac{16-128}{3}x^6 + o(x^6) = \frac{112}{3}x^6 + o(x^6) \sim \frac{112}{3}x^6$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int \frac{1}{4x^2+12x+10}\,dx = I$$

Risoluzione

$4x^2 + 12x + 10 = (2x+3)^2 + 1$.

Quindi poniamo $t := 2x+3 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2$

cioè $dx = \frac{dt}{2}$. Inoltre segue

$$I = \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\arctan(t) + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(2x+3) + c$$

$$\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{\frac{112}{3}\cancel{x^6}}{7\cancel{x^6}} = \frac{112}{3\cdot 7} = \frac{16}{3} = \lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare i punti critici di di $f(x, y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 4x - 4$.

Risoluzione

Punti critici: $f_x(x,y) = -3x^2 + 2x - y^2 + 4 \overset{!}{=} 0$ (1)

$f_y(x,y) = 2y - 2yx = 2y \cdot (1-x) \overset{!}{=} 0$ (2)

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} y = 0$ oppure $x = 1$

$\boxed{y=0}$: $\overset{(1)}{\Longrightarrow} -3x^2 + 2x + 4 = 0 \Longrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{-6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$

$\Longrightarrow P_{1/2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}, 0\right)$ sono pti. critici

$\boxed{x=1}$: $\overset{(1)}{\Longrightarrow} -3 + 2 - y^2 + 4 = 0 \Longrightarrow y^2 = 3 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{3}$

$\Longrightarrow P_{3/4} = (1, \pm\sqrt{3})$ sono pti. critici.

Studio Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+2 & -2y \\ -2y & 2-2x \end{pmatrix}$

• $H_f(P_{1/2}) = \begin{pmatrix} \mp 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \mp \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\sqrt{13}}_{>2} \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{def. neg in } P_1 \\ \text{def. pos. in } P_2 \end{cases}$

$\Longrightarrow P_1 =$ pto. di max. locale, $P_2 =$ pto. di min. locale

• $H_f(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} -4 & \mp 2\sqrt{3} \\ \mp 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} =: H$ con $\det(H) < 0$

$\Longrightarrow P_{2/3}$ sono pti. di sella.