Analisi Matematica (1). Durata della prova: 2 ore 9.6.2025

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1 **[4 punti]**

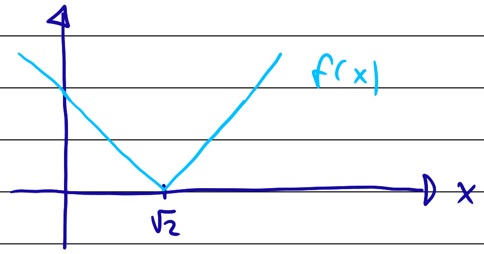
(i) Dare la definizione di continuità in $x = x_0$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di una funzione continua ma non derivabile in $x_0 = \sqrt{2}$.

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii) P.e. $f(x) = |x - \sqrt{2}|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = \sqrt{2}$



Domanda 2 **[4 punti]**

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Calcolare i punti nel teorema di Rolle per la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Risposta

(i) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b).
Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$

(ii)
- f è continua e derivabile in $(0,1)$ con $f'(x) = 3x^2 - 2x$
- $f(0) = 1$ e $f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$, quindi $f(0) = f(1)$

$\Rightarrow$ (per Rolle) $\exists\, c \in (0,1)$ con $f'(c) = 0$.

Inoltre $f'(x) = 3x^2 - 2x = x \cdot (3x - 2) = 0 \iff x = 0$ opp $x = 2/3$

Quindi il punto cercato è $\underline{\underline{c = 2/3}}$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{n^4-4n^2+1}-n^2\right)}_{=:a_n} =: \ell$$

Risoluzione

$$a_n = \left(\sqrt{n^4-4n^2+1}-n^2\right) \cdot \frac{\sqrt{n^4-4n^2+1}+n^2}{\sqrt{n^4-4n^2+1}+n^2}$$

$$= \frac{(\cancel{n^4}-4n^2+1)-\cancel{n^4}}{\sqrt{n^4-4n^2+1}+n^2} = \frac{\cancel{n^2}\cdot\left(-4+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\cdot\left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}_{\to\sqrt{1}=1}+1\right)} \Rightarrow \frac{-4}{1+1} = -2$$

per $n\to+\infty$

Quindi $\ell = -2$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x\cdot e^{\cos(x)}$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
- $f(x_0) = \frac{\pi}{2}\cdot e^{\cos(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}\cdot e^0 = \frac{\pi}{2}$
- $f'(x) = 1\cdot e^{\cos(x)} + x\cdot e^{\cos(x)}\cdot(-\sin(x)) \Rightarrow$

$f'(x_0) = e^{\cos(\pi/2)} - \frac{\pi}{2}\cdot e^{\cos(\pi/2)}\cdot \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} = 1-\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{\pi}{2} + \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Esercizio 3 **[5 punti]**

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_1^e \frac{\ln(\sqrt{x}\,)}{x}\,dx$$

Risoluzione

- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\cdot \ln(x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{\overbrace{\ln(x)}^{t}}{x}\,dx$ $\frac{dx}{x} = dt$

Sost: $\bullet\ \ln(x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

- $x = 1 \Rightarrow t = \ln(1) = 0$
- $x = e \Rightarrow t = \ln(e) = 1$

Quindi segue $I = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(4,1)$ di $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ nella direzione $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Risoluzione

- $D_v f(4,1) = f_x(4,1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - f_y(4,1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$

$f_y(x,y) = -\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-3/2}$

$\Rightarrow f_x(4,1) = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{4^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{2}}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$f_y(4,1) = -\frac{1}{2}\cdot \underbrace{4^{\frac{1}{2}}}_{=2}\cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -1$

$\Rightarrow D_v f(4,1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{8}\cdot\sqrt{2}$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Determinare il dominio, eventuali zeri, asintoti ed estremi locali di $f(x) = \frac{x^2}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{= (x+1)\cdot(x-2)}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio X: $x \in X \iff x^2 - x - 2 \neq 0$. $x^2 - x - 2 = 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{1 \pm \overbrace{\sqrt{1+8}}^{=3}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$\Rightarrow X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

• Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$.

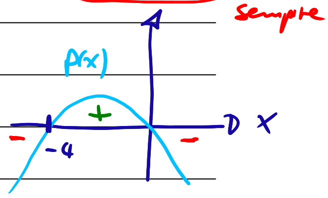
• Asintoti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \frac{1}{0^{\mp} \cdot (-3)} = \pm\infty$, $\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \frac{4}{3 \cdot 0^{\pm}} = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ e } x = 2 \\ \text{sono asintoti} \\ \text{verticali di } f \end{cases}$

• Estremi locali: f è derivabile in $X \Rightarrow$ gli unici candidati per punti di estremo locali sono i punti critici di f.

$$f'(x) = \frac{(x^2-x-2)\cdot 2x - (2x-1)\cdot x^2}{(x^2-x-2)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x^2 - 4x - \cancel{2x^3} + x^2}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \frac{\overbrace{-x\cdot(x+4)}^{=: P(x)}}{\underbrace{(x^2-x-2)^2}_{>0 \text{ sempre}}}$$

$= 0 \iff x = 0$ opp. $x = -4$



Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in $x = -4$ da "−" a "+"

in $x = 1$ da "+" a "−"

$\Rightarrow$ • $x = -4$ è un punto di minimo locale di f,

• $x = 1$ —"— massimo —"— .

Grafico: