Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$.

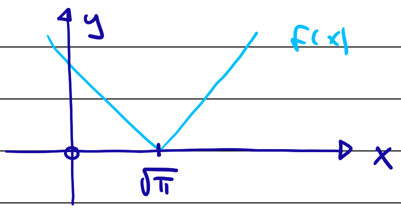
(ii) Fare l'esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma *non* derivabile in $x_0 = \sqrt{\pi}$.

Risposta

(i) f è continua in $x_0 \in (a,b)$ se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii) P.e. $f(x) = |x - \sqrt{\pi}|$, $x \in \mathbb{R}$ è continua ma non derivabile in $x_0 = \sqrt{\pi}$.



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare un punto c del teorema di Rolle per la funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b) con $f(a) = f(b)$

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

(ii) • f è derivabile con $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x-2)$

• $f(0) = 1 = f(3)$.

Quindi cerchiamo $c \in (0,3)$ t.c. $f'(c) = 0$

$\Leftrightarrow c = 2$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1-\cosh(x)} =: \ell$$

Risoluzione

- $1-\cosh(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 2° ordine.

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$$1 - \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\sim \frac{x^2}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

P.d.S.

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/6}{-x^2/2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolare il valore nel caso converga.

$$I := \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$$

Risoluzione

- $I = \lim_{a\to 3^+} \int_a^7 (x-3)^{-1/2}\,dx$

- $\int (x-3)^{-1/2}\,dx = \underbrace{\frac{1}{1/2}}_{=2} \cdot (x-3)^{1/2} + c$

$$\Rightarrow I = \lim_{a\to 3^+} 2 \cdot \left[\sqrt{x-3}\right]_a^7$$

$$= 2 \cdot \lim_{a\to 3^+} \left(\underbrace{\sqrt{7-3}}_{=2} - \underbrace{\sqrt{a-3}}_{\to 0 \text{ per } a \to 3^+} \right)$$

$$= 2 \cdot 2 = 4$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente della funzione $f(x,y) := \dfrac{\sinh(y)}{\cos(x)}$ nel punto $(\pi, \ln(2))$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(\pi, \ln(2)) + f_x(\pi, \ln(2)) \cdot (x-\pi) + f_y(\pi, \ln(2)) \cdot (y - \ln(2))$

- $f(\pi, \ln(2)) = \dfrac{\frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2}}{\cos(\pi)} = \dfrac{\frac{2-\frac{1}{2}}{2}}{= -1} = -3/4$

- $f_x(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\sinh(y) \cdot \cos(x)^{-1}\right) = \sinh(y) \cdot (-1) \cdot \cos(x)^{-2} \cdot (-\sin(x))$

  $\Rightarrow f_x(\pi, \ln(2)) = 0$ (visto che $\sin(\pi) = 0$)

- $f_y(x,y) = \dfrac{\cosh(y)}{\cos(x)} \Rightarrow f_y(\pi, \ln(2)) = \dfrac{\frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2}}{\cos(\pi)} = \dfrac{\frac{2+\frac{1}{2}}{2}}{-1}$

  $= -\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow p(x,y) = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot (y - \ln(2))$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabilità nel punto $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)\cdot\cos(y^2)}{x^2+y^2} - 3x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

- Poniamo $y = 0$: $\lim_{x \to 0} f(x,0) \overset{\cos(0)=1}{=} \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} - 3x$

  $= 1 \neq f(0,0) = 0$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$

Derivabilità parziale:

$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\underbrace{\frac{\ln(1+h^2)}{h^2}}_{\to 1} - \underbrace{3h}_{\to 0} - 0}{h}$ per $h \to 0$ non esiste

$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\dfrac{0-0}{h}}_{=0} = 0$

$\Rightarrow f$ è derivabile rispetto ad y ma non rispetto ad y in $(0,0)$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, zeri, eventuali asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, Zeri: $f(x) = 0 \iff x = 0$

Asintoti: • $\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \frac{(-1)^2}{-1^\pm + 1} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$

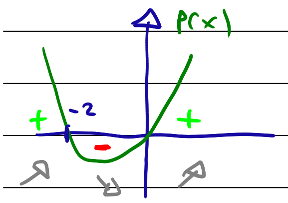
• $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \implies$ possibili asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{\underbrace{x \cdot (x+1)}_{\sim\, x \cdot x = x^2 \text{ per } x \to \pm\infty}} = 1 =: m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - m \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} - x \cdot \frac{x+1}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 = q$$

$\implies y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Studio di $f'(x)$: $f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x \cdot (x+2)}{(x+1)^2}$ $\quad x \cdot (x+2) =: p(x)$, $\quad (x+1)^2 > 0$



$= 0 \iff x = 0$ opp. $x = -2$

Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in

• $x = -2$ da "+" a "−" $\implies x = -2$ è un pto. di max locale

• $x = 0$ da "−" a "+" $\implies x = 0$ è un pto. di min locale

Grafico: