Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(ii) Descrivere il comportamento della successione $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q > 1 \\ 1, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{se } |q| < 1 \\ \text{non esiste}, & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0).

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente $p(x, y)$ a $f(x, y) = xy^2 + e^{x^2y}$ in $(2, 0)$.

Risposta

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \iff \exists\ A \in \mathbb{R}^2$

prodotto scalare

t.c. $f(x,y) = f(x_0,y_0) + A \cdot ((x,y) - (x_0,y_0)) + o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|)$

per $(x,y) \to (x_0,y_0)$

In questo caso $A = \nabla f(x_0,y_0)$

(ii) $f(2,0) = e^0 = 1$

$f_x(x,y) = y^2 + e^{x^2 y} \cdot 2xy \Rightarrow f_x(2,0) = 0$

$f_y(x,y) = 2xy + e^{x^2 y} \cdot x^2 \Rightarrow f_y(2,0) = e^0 \cdot 2^2 = 4$

$\Rightarrow p(x,y) = f(2,0) + f_x(2,0)\cdot(x-2) + f_y(2,0)\cdot(y-0)$

$= 1 + 0\cdot(x-2) + 4\cdot y = \underline{\underline{1 + 4y}}$

Esercizio 1 [3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora quale delle seguenti affermazioni é *falsa*

[a] f ha minimo in $[1, 2]$

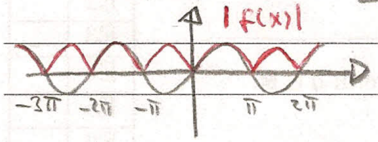
[b] f é integrabile in $[0, \pi]$

[$\boxtimes$ c] $|f|$ é derivabile in $\mathbb{R}$ eccetto al piú un numero finito di punti.

[d] $|f|$ é continua in $x = -2$

Risoluzione

Per esempio, $f(x) = \sin(x)$ è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre $|f(x)| = |\sin(x)|$ non è derivabile in $x = k \cdot \pi \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$:



Esercizio 2 [3 punti]

Per quale delle seguenti successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale $a_n \sim n^3$ per $n \to +\infty$?

[a] $a_n = n^3 + 3^n$ [$\boxtimes$ b] $a_n = n^3 - \ln(n^n)$ [c] $a_n = n^3/n!$ [d] $a_n = n^3 + 3n^5$

Risoluzione

$$\frac{n^3 + \ln(n^n)}{n^3} = 1 + \frac{n \cdot \ln(n)}{n^3} = 1 + \frac{\ln(n)}{n^2} \to 1 + 0 = 1 \text{ per } n \to +\infty$$

quindi $n^3 + \ln(n^n) \sim n^3$ per $n \to +\infty$

Esercizio 3 [3 punti]

La formula

$$\int_{-1}^{1} f(x) f''(x)\, dx \le 0 \qquad \text{ove } f \in C^2[-1, 1] \text{ è}$$

[a] falsa per ogni f

[b] vera se f è dispari

[c] vera se $f(-1) = f(1) = 0$

[d] vera per ogni f

(Suggerimento: Utilizzare integrazione per parti)

Risoluzione

Usando integrazione per parti si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x) \cdot f''(x)}_{g \cdot h'} dx = \underbrace{f(x) \cdot f'(x)}_{g \cdot h} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \underbrace{f'(x) \cdot f'(x)}_{g' \cdot h} dx$$

poichè $f(-1) = f(1) = 0$

$$= - \int_{-1}^{1} \underbrace{(f')^2(x)}_{\geq 0} dx \le 0.$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\underline{\underline{-\frac{11}{12}}} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 2(\cos(x) - e^{x^2})}{\ln(1 + x^4) \sim x^4 \text{ per } x \to 0}$$

Risoluzione

Quindi dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 4° ordine:

$\bullet\ 2\cos(x) = 2\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

$\bullet\ 2e^t = 2\cdot\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \underset{t = x^2}{=} 2 + 2x^2 + x^4 + o(x^4) = 2\cdot e^{x^2}$

$\Rightarrow 3x^2 + 2(\cos(x) - e^{x^2}) = \cancel{3x^2} + \cancel{2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{12} - \cancel{2} - \cancel{2x^2} - x^4 + o(x^4)$

$= \left(\frac{1}{12} - 1\right)x^4 + o(x^4) = \frac{-11}{12}x^4 + o(x^4) \sim \frac{-11}{12}x^4 \quad (x \to 0)$

$\Rightarrow \frac{3x^2 + 2(\cos(x) - e^{x^2})}{\ln(1 + x^4)} \sim \frac{-11/12 \cdot x^4}{x^4} = \underline{\underline{-\frac{11}{12}}} = \text{limite}$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx$$

Risoluzione

Il discriminante del polinomio $x^2 + 4x + 5 = p(x)$ è dato da

$4^2 - 4\cdot 5 < 0 \Rightarrow p(x)$ non ha zeri ($\Rightarrow$ caso iii) appunti)

Allora, $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \Rightarrow$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x+2)^2 + 1}\, dx = \arctan(x+2)\Big|_{-3}^{-1}$$

$$= \arctan(1) - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare dominio X, zeri, limiti alla frontiera di X, estremi locali e concavità della funzione $f(x) = x \cdot \ln^2(x)$ tracciandone un grafico approssimativo.

Risoluzione

- $x \in X \iff x > 0$ cioè $X = (0, +\infty)$
- $f(x) = 0 \iff \ln^2(x) = 0 \iff x = 1.$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln^2(x) = \lim_{t \to -\infty} e^t \cdot t^2 = 0$

  sost. $\ln(x) = t \iff x = e^t$ e $x \to 0^+ \iff t \to -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln^2(x) = +\infty$
- $f'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + \cancel{x} \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

  $= \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2)$

Quindi $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 0$ opp. $\ln(x) = -2$

$\iff x = 1$ opp. $x = e^{-2}$ (= pti. critici)

- $f''(x) = \frac{1}{x} \cdot (\ln(x) + 2) + \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot (\ln(x) + 1)$

Quindi $f''(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1$

$\iff x \geq e^{-1}$

$\Rightarrow$ f è concava su $(0, e^{-1})$ e convessa su $(e^{-1}, +\infty)$

$\Rightarrow$ $x = e^{-1}$ è un pto. di flesso.

Inoltre, $f''(1) = 2 \cdot (0 + 1) > 0 \Rightarrow x = 1$ è un pto di min. locale

$f''(e^{-2}) = 2 \cdot e^{2} (-2 + 1) < 0 \Rightarrow x = e^{-2}$ è un pto. di max. locale.

Visto che la frontiera di X (cioè 0 e $+\infty$) non appartengono a X e $f \in C^1(0, +\infty)$ i punti critici $x = 1$ e $x = e^{-2}$ sono gli unici estremi locali di f.