

Analisi Matematica I (A.A. 2010/2011)

Docente: Klaus Engel

Esercizi su Insiemi numerici, Induzione, Successioni e Serie

Esercizio 1. Determinare, se esistono, il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore degli insiemi

$$A := \left\{ \frac{(-1)^n}{2+n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B := \left\{ \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}^*, \quad C := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$D := \left\{ n^2 - \frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad E := \left\{ \frac{m}{n} - \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad F := \left\{ \frac{|3-n|}{3+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(* Usare $x + \frac{1}{x} \geq 2$ per ogni $x > 0$.)

Esercizio 2. Verificare per induzione le seguenti affermazioni per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \quad \sum_{k=2n+1}^{3n} k = \frac{n(5n+1)}{2},$$
$$n! \geq 2^{n-1}, \quad \frac{6^{2n} - 3^n}{11} \text{ è un numero naturale.}$$

Esercizio 3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{2}{n}} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^n} \right)^{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1} \right)^{2n^2},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{11} - (n-1)^{11}}{n^{10}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{n!}} \quad (a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n n^{2n}}{(n!)^3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}.$$

Esercizio 4.** Sia $a_0 := 1$ e $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Verificare per induzione che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente.
- Verificare per induzione che $1 \leq a_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- Dimostrare che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e determinare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(** Esercizio facoltativo.)

Esercizio 5. Verificare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \binom{2k}{k}^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1 \right)^k,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^3 + 2k + 2}{3k^3 - 3k - 3} \right)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+2} \right)^{k^2+2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-3^k}{5^k-5k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{1+k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!+2}{(k+2)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k - k^k}.$$