ESAME DI ANALISI FUNZIONALE - SOLUZIONI
A.A. 2016/17

03.02.2017

Esercizio 1. Sia $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ il seguente operatore

$$(Tf)(x) = g(x)f(x)$$

dove g è la funzione

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{if } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

(1) Dimostrare che T e' un operatore continuo. [5].
(2) Calcolare la norma di T. [5].

Soluzione.
1) Sia $f \in L^2(0,1)$, allora

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 &= \int_0^1 |g(x)|^2 |f(x)|^2 \, dx \\ &\leq e \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \\ &= e\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Quindi, $\|T\| \leq \sqrt{e}$.
2) Per calcolare la norma di T consideriamo la sequenza

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{in } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right), \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $\|f_n\|_2 = 1$ e

$$\begin{aligned} \|Tf_n\|_2^2 &= \int_0^1 |g(x)|^2 |f_n(x)|^2 \, dx \\ &= n \int_{1/2-1/n}^{1/2} e^{2x} \, dx \\ &= \frac{n}{2} \left(e - e^{1-\frac{2}{n}} \right) \to e \text{ per } n \to \infty. \end{aligned}$$

Quindi, $\|T\| = \sqrt{e}$.

Esercizio 2. Sia $1 < p < \infty$ e $\{f_n\}_n$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{1}{p}}}{1 + n^2 x^2} \qquad x \in (0, \infty).$$

Dimostrare che

(1) $f_n \to 0$ quasi ovunque. [1].
(2) $\{f_n\}_n$ è uniformente limitata in $L^p(0, +\infty)$. [1].
(3) $\{f_n\}_n$ non converge forte a 0 in $L^p(0, +\infty)$. [2].
(4) $\{f_n\}_n$ converge debole a 0 in $L^p(0, +\infty)$. [3].
(5) $\{f_n\}_n$ converge forte a 0 in $L^q(0, +\infty)$ per $1 \leq q < p$. [3].

Soluzione.
1) Ovvio.
2) Calcolando la norma

$$\begin{aligned}\|f_n\|_p^p &= \int_0^\infty \frac{n}{(1+n^2x^2)p}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3) $\{f_n\}_n$ non converge forte a 0 in $L^p(0, \infty)$ perchè

$$\|f_n\|_p^p \nrightarrow 0 \quad n \to \infty.$$

4) Siano $0 \leq a < b < \infty$ e consideriamo come funzione test in $L^q(0, \infty)$ and $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$. Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{n^{\frac{1}{p}}}{1+n^2x^2}\,dx\right| &= \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}\left|\int_a^b \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx\right| \\ &= \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}\left|\int_{na}^{nb} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right| \\ &\leq \frac{\pi}{n^{1-\frac{1}{p}}} \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

In particolare la convergenza vale per ogni combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli. Poichè le funzioni a gradino sono dense in $L^q(0, \infty)$, per ogni $g \in L^q(0, \infty)$ si può trovare una sequenza di funzioni a gradino g_k tali che $g_k \to g$ forte in $L^q(0, \infty)$. Quindi

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty f_n(x)g(x)\,dx\right| &\leq \int_0^\infty |f_n(x)||g(x) - g_k(x)|\,dx + \left|\int_0^\infty f_n(x)g_k(x)\,dx\right| \\ &\leq \|f_n\|_p\|g - g_k\|_q + \left|\int_0^\infty f_n(x)g_k(x)\,dx\right| \\ &\leq C\|g - g_k\|_q + \left|\int_0^\infty f_n(x)g_k(x)\,dx\right| \\ &= (I) + (II)\end{aligned}$$

Sia $\varepsilon > 0$, allora esiste $k = k(\varepsilon)$ tale che $(I) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, quindi per k fissato esiste $n = n(\varepsilon, k) = n(\varepsilon)$ tale che $(II) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
5) Sia $1 \geq q < p$, allora

$$\|f_n\|_q^q = \int_0^\infty \frac{n^{\frac{q}{p}}}{(1+n^2x^2)^q}\,dx = \frac{1}{n^{1-\frac{q}{p}}}\int_0^\infty \frac{1}{(1+y^2)^q}\,dy \to 0 \quad n \to \infty.$$

Esercizio 3. Sia $T : C([0,1] \to C([0,1])$ il seguente operatore

$$(Tf)(x) = \int_0^x e^y\, f(y)\,dy.$$

(1) Dimostrare che T è continuo. [2].
(2) Verificare se T è compatto. [4].
(3) Calcolare gli eventuali autovalori e determinare lo spettro. [4].

Soluzione.
1) Sia $f \in C([0,1])$, allora

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x e^y f(y)\, dy \right| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^y |f(y)|\, dy \\ &\leq (e-1)\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

2) T è compatto. Usiamo Ascoli-Arzelà per dimostrarlo. Sia B_1 la palla unitaria chiusa in $C([0,1])$. Poichè T è un operatore continuo allora $T(B_1)$ è un insieme equi-limitato di $C([0,1])$. Per dimostrare che T è un operatore compatto basta provare che $T(B_1)$ è equi-continuo. Sia $f \in B_1$ e $x, y \in [0,1]$ tali che $x < y$. Allora,

$$\begin{aligned}|(Tf)(x) - (Tf)(y)| &\leq \int_x^y e^t |f(t)|\, dt \\ &\leq e\|f\|_\infty |x-y|\end{aligned}$$

Analogamente se $y < x$ abbiamo che per ogni $f \in B_1$ e $x, y \in [0,1]$

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq e|x-y|$$

L' equi-continuità di $T(B_1)$ e quindi la compattezza di T seguono facilmente.
3) Poichè T è compatto usando il teorema di Shauder segue che

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T).$$

e $\sigma_p(T)$ è numerabile. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \in \sigma_p(T)$ se esiste $f \neq 0$ soluzione di

$$\int_0^x e^y f(y)\, dy = \lambda f(x). \tag{1}$$

In particolare, se f solution of (1) allora $f \in C^1([0,1])$ and soddisfa

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{e^x f(x)}{\lambda} \\ f(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Quindi, poichè l'unica soluzione of (2) è $f = 0$ segue che $\sigma_p(T) = \emptyset$.