

Esame di Equazioni della Fisica Matematica (3 crediti di Meccanica Quantistica) del 23-02-2024.

1. Discutere il seguente argomento:

- stato legato e relativa energia di una particella con potenziale singola delta - $\alpha\delta(x)$. [10 pt]

2. Risolvere i seguenti esercizi:

- sia ψ_0 lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico, di trovi lo stato $\hat{a}(a^+)^2\psi_0$ e si dica qual è la sua energia (non è necessaria la forma esplicita degli stati; [8 pt]
- si consideri la hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \alpha\hat{x}^4$ con $\alpha > 0$ e si dia una stima dall'alto dell'energia E_0 dello stato fondamentale. Per la stima si utilizzi una funzione prova $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$ e si ottimizzi scegliendo opportunamente il valore di σ . Si mostri che nel limite $\alpha \rightarrow 0$ questa stima coincide con l'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Suggerimento 1: si tenga presente che la funzione di prova è di minima indeterminazione, con impulso medio e posizione media nulli e che il suo modulo quadro è una gaussiana di varianza σ per cui : $\langle \hat{x}^2 \rangle = \sigma^2$, $\langle \hat{x}^4 \rangle = 3\sigma^4$ e $\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$.

Suggerimento 2: si eviti di fare il calcolo esplicito del minimo della funzione di stima **eccetto** nel caso $\alpha \rightarrow 0$. [12 pt]