

14. Principi variazionali

Si introduce la nozione di funzionale e si stabilisce la condizione di stazionarietà. Per una classe di funzionali, definiti sulle traiettorie ad estremi fissi, si prova che la soluzione stazionaria è quella che soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange. Questa proprietà rende possibile una formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange e di Hamilton per le traiettorie ad estremi fissati e di evidenziare alcuni aspetti geometrici del moto.

14.1. CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Numerosi sono i problemi di carattere geometrico o meccanico che vengono naturalmente posti sotto forma variazionale. Tra gli esempi classici ricordiamo: il problema della *geodetica*, consistente nel trovare, su di una superficie data, la curva di lunghezza minima che congiunge due punti assegnati, il problema della *brachistocrona*, consistente nel trovare in un piano verticale la curva che unisce due punti assegnati e sulla quale il tempo di transito di un punto materiale soggetto alla forza peso sia minimo, il problema della *minima superficie di rivoluzione* consistente nel trovare la curva piana con estremi assegnati, tale che l'area della superficie di rivoluzione attorno ad una data retta del piano sia minima.

In ciascuno degli esempi qui citati l'incognita è una curva di estremi assegnati, a cui viene associata una variabile reale, quale la lunghezza, il tempo di transito o l'area, e si richiede di determinare la curva per cui questa variabile assume il minimo valore.

Da un punto di vista matematico si considera una applicazione \mathcal{F} , detta funzionale e definita su uno spazio di funzioni \mathcal{C} . Il problema variazionale posto sopra consiste nel cercare l'elemento di \mathcal{C} per cui il funzionale \mathcal{F} risulta minimo. Di norma ci si limita a determinare l'elemento di \mathcal{C} per cui la variazione prima di \mathcal{F} è nulla; in questo caso si dice

che \mathcal{F} è stazionario. Indicheremo con $\mathbf{x}(t)$, le traiettorie in \mathbb{R}^d , che costituiscono lo spazio \mathcal{C} e con $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ il funzionale.

Il funzionale si può considerare come una generalizzazione delle applicazioni definite su uno spazio euclideo finito dimensionale. Infatti supponendo $d = 1$ discretizziamo l'intervallo temporale scegliendo su di esso N punti equispaziati ed alla funzione $x(t)$ sostituiamo un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ le cui componenti sono

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = t_a + \frac{t_b - t_a}{N-1}(k-1), \quad k = 1, \dots, N \quad (14.1.1)$$

Il funzionale è sostituito da una applicazione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e i punti di stazionarietà di f sono quelli in cui il gradiente si annulla, i punti di minimo quelli in cui la matrice hessiana è definita positiva. In un punto \mathbf{x} , ove risultino soddisfatte le condizioni seguenti per ogni vettore \mathbf{h}

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{h} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k = 0 & \text{punto di stazionarietà} \\ \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_j h_k > 0 & \text{punto di minimo} \end{cases} \quad (14.1.2)$$

e la funzione f è stazionaria e ha un minimo. La condizione di stazionarietà può essere letta come l'annullarsi di una applicazione lineare $\mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{h} = \text{grad } f \cdot \mathbf{h}$ detta variazione prima di f e definita da

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{h} = O(\|\mathbf{h}\|^2) \quad (14.1.3)$$

La variazione prima di una applicazione definita da (14.1.3) si generalizza ai funzionali, purché si doti lo spazio \mathcal{C} di una norma opportuna, quale ad esempio

$$\|x\| = \left(\int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (14.1.5)$$

che è l'analogo della norma euclidea. Le nozioni di limite e continuità si estendono in modo naturale. Se $x, x_0 \in \mathcal{C}$ diciamo che $\mathcal{F}(x)$ è continuo se ad $\forall \epsilon$ si può associare un δ_ϵ tale che $\|x - x_0\| < \delta_\epsilon$ implichi $|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_0)| < \epsilon$. Nello spazio \mathcal{C} un funzionale \mathbf{L} si dice lineare se $\mathbf{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{L}x + \beta \mathbf{L}y$ per ogni costante reale α, β . La variazione prima di \mathcal{F} (derivata di Frechet) è un funzionale lineare \mathbf{L} tale che

$$\mathcal{F}(x + h) - \mathcal{F}(x) - \mathbf{L}h = O(\|h\|^2) \quad (14.1.6)$$

dove $x + h \in \mathcal{C}$.

Definizione. Il funzionale \mathcal{F} si dice stazionario in un punto $x \in \mathcal{C}$ se la sua variazione prima in x si annulla $Lh = 0$ per $\forall h$ tale che $x + h \in \mathcal{C}$.

Come esempio consideriamo il funzionale

$$\mathcal{F}(x) = \int_{t_a}^{t_b} F(x(t), t) dt \quad (14.1.7)$$

dove $F(x, t)$ ha derivate seconde F_{xx} continue. Attraverso lo sviluppo di Taylor di F

$$\mathcal{F}(x + h) - \mathcal{F}(x) = \int_{t_a}^{t_b} F_x(x(t), t) h(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} F_{xx}(\xi(t), t) h^2(t) dt \quad (14.1.8)$$

dove $\xi(t) \in [x(t), x(t) + h(t)]$, si definisce il funzionale lineare L ed il resto risulta $O(\|h\|^2)$ con la norma (14.1.5). L'annullarsi del funzionale lineare implica che $F(x, t) = 0$ e definisce implicitamente una soluzione $x = x(t)$. Per dimostrarlo ci serviamo del seguente lemma del calcolo delle variazioni.

Lemma. Se $G(t)$ è una applicazione continua di $[t_a, t_b]$ in \mathbb{R} e se

$$\int_{t_a}^{t_b} G(t)h(t)dt = 0, \quad (14.1.9)$$

per ogni $h(t)$ continua su $[t_a, t_b]$ allora $G(t) = 0$ identicamente.

Supponiamo infatti per assurdo che in un punto $t_0 \in [t_a, t_b]$ si abbia $G(t_0) > 0$ allora per la continuità esisterà un intorno $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ con $\epsilon > 0$ tale che $G(t) > G(t_0)/2$ in tutti i punti di tale intorno. Definiamo una funzione $\chi_\epsilon(t)$ non nulla solo in $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, continua e con integrale uguale ad 1 e scegliamo $h(t) = G(t_0)\chi_\epsilon(t)$.

$$\int_{t_a}^{t_b} \chi_\epsilon(t) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t) dt = 1 \quad (14.1.10)$$

Si verifica che

$$\int_{t_a}^{t_b} G(t)h(t)dt = G(t_0) \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t)G(t)dt \geq \frac{G_0^2}{2} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \chi_\epsilon(t)dt = \frac{G(t_0)^2}{2} > 0 \quad (14.1.11)$$

in contraddizione con l'ipotesi.

14.2. EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

Consideriamo il funzionale definito da

$$\mathcal{F}(x) = \int_{t_a}^{t_b} F(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (14.2.1)$$

dove $F(x, y, t)$ ha derivate seconde continue. Lo spazio su cui \mathcal{F} è definito è quello delle traiettorie ad estremi fissi x_a, x_b

$$\mathcal{C} = \{x(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t_a) = x_a, \quad x(t_b) = x_b\} \quad (14.2.2)$$

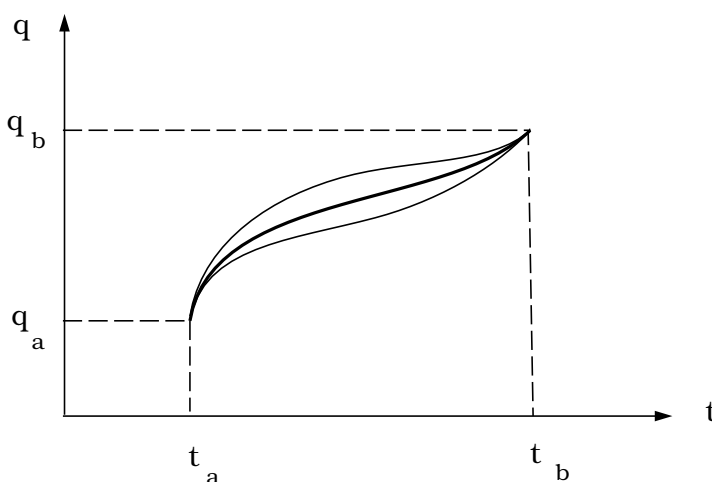


Figura 14.2.1. Traiettoria fisica (linea spessa) e traiettorie variate (linee sottili).

Se indichiamo ora con $x(t)$ una traiettoria e con $x(t) + h(t)$ una traiettoria variata, vedi figura 14.2.1, la variazione $h(t)$ è necessariamente nulla agli estremi $h(t_a) = h(t_b) = 0$.

Proposizione. Condizione necessaria e sufficiente perché il funzionale \mathcal{F} sia stazionario su una traiettoria $x(t)$ è che questa soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad x(t_a) = x_a, \quad x(t_b) = x_b, \quad (14.2.3)$$

Calcoliamo la variazione di \mathcal{F} mediante uno sviluppo di Taylor cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) &= \int_{t_a}^{t_b} [F(x(t)+h(t), \dot{x}(t)+\dot{h}(t), t) - F(x(t), \dot{x}(t), t)] dt = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} [F_x(x(t), \dot{x}(t), t)h(t) + F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\dot{h}(t)] dt + \mathcal{R} \end{aligned} \quad (14.2.4)$$

dove con F_x e $F_{\dot{x}}$ indichiamo le derivate parziali di F rispetto a x e \dot{x} mentre \mathcal{R} è il termine di resto, che risulta $O(\|h\|^2)$ in una opportuna norma. Integrando per parti si ottiene allora

$$\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) = \int_{t_a}^{t_b} \left[F_x(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] h(t) dt + F_{\dot{x}} h(t) \Big|_{t_b}^{t_a} + \mathcal{R} \quad (14.2.5)$$

Il fattore finito che viene dalla integrazione per parti è nullo poiché la variazione $h(t)$ si annulla agli estremi. Il funzionale lineare, che esprime la variazione prima, è dato da

$$\mathbb{L}h = \int_{t_a}^{t_b} G(t)h(t)dt, \quad G(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (14.2.6)$$

Che (14.2.3) sia una condizione sufficiente perché \mathcal{F} sia stazionario è evidente poiché se $G(t) = 0$ allora $\mathbb{L}h = 0$. Che tale condizione sia anche necessaria si dimostra usando il lemma del precedente paragrafo. Infatti se $\mathbb{L}h = 0$ per $\forall h$ dalle ipotesi fatte segue che sia G sia h sono continui e quindi $G(t) = 0$ per $t \in [t_a, t_b]$.

La estensione al caso in cui \mathcal{F} è definito sulle traiettorie $\mathbf{x}(t)$ in \mathbb{R}^d con $d > 1$ è ovvia; basta osservare che le variazioni $h_1(t), \dots, h_d(t)$ sono tra loro indipendenti, per cui la condizione di stazionarietà diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, d \quad (14.2.7)$$

Geodetiche

Come applicazione consideriamo il problema della geodetica su di una superficie con estremi P_a, P_b . Consideriamo una carta locale, cioè la rappresentazione parametrica espressa dalle coordinate lagrangiane q_1, q_2 nella forma $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2)$. Siano (q_{1a}, q_{2a}) e (q_{1b}, q_{2b}) i punti sulla carta che corrispondono a P_a, P_b cioè $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}(q_{1a}, q_{2a})$, $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}(q_{1b}, q_{2b})$. La lunghezza ds di un elemento d'arco sulla superficie è data da

$$ds^2 = g_{11}dq_1^2 + 2g_{12}dq_1dq_2 + g_{22}dq_2^2, \quad g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \quad (14.2.8)$$

Se $q_2 = \phi(q_1)$, rappresenta una curva tracciata sulla carta la sua immagine $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \phi(q_1))$ è una curva tracciata sulla varietà. Lo spazio \mathcal{C} in questo caso è dato dalle funzioni $\phi(q_1)$ definite sull'intervallo $[q_{1a}, q_{1b}]$, che hanno valori assegnati q_{2a}, q_{2b} agli estremi. La lunghezza delle curve tracciate su \mathcal{M} con estremi P_a e P_b e (e rappresentate sulla carta) è data da

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_{P_a}^{P_b} ds = \int_{q_{1a}}^{q_{1b}} \sqrt{g_{11} + 2g_{12}\dot{\phi} + g_{22}\dot{\phi}^2} dq_1 \quad (14.2.9)$$

e quella che rende \mathcal{F} stazionario soddisfa le equazioni di Eulero Lagrange. La geodetica è la curva di lunghezza minima tra quelle tracciate su \mathcal{M} , che congiungono P_a e P_b , vedi figura (14.2.2).

Se la superficie è un piano, che possiamo identificare con il piano xy in un opportuno riferimento cartesiano, rappresentiamo con $y = y(x)$ l'equazione della curva ($q_1 = x$, $q_2 = y$). In questo caso $F = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ e poiché non dipende da x , si ha l'integrale primo del moto

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{y} - F = -\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \quad (14.2.10)$$

Ne segue $\dot{y} = (c^{-2} - 1)^{1/2}$ e quindi integrando $y(x) = (c^{-2} - 1)^{1/2}x + b$ dove le costanti c e b vengono determinate imponendo che la curva passi per i punti P_a, P_b . La geodetica è pertanto in questo caso il segmento che ha P_a e P_b come estremi.

Cambiano le condizioni che garantiscono l'esistenza di una soluzione e la sua unicità, come mostra l'esempio dell'oscillatore armonico. Per la lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$ la soluzione che si annulla agli estremi $q(t_a) = q(t_b) = 0$ è unica, se $t_b - t_a$ non è un multiplo intero del semi-periodo $T/2 = \pi/\omega$, mentre vale $q(t) = A \sin \omega(t - t_a)$ con A arbitrario se $t_b - t_a = n\pi/\omega$.

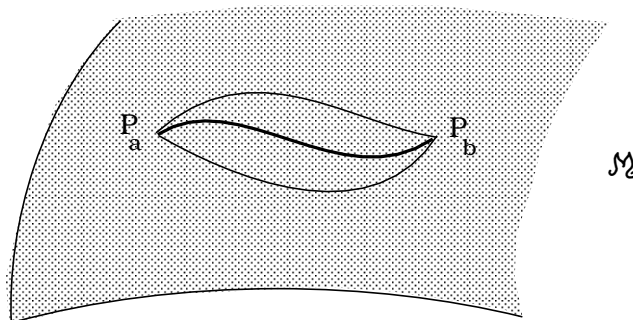


Figura 14.2.2. Geodetica (linea spessa) e traiettorie variate (linee sottili).

14.3. PRINCIPI DI HAMILTON

La formulazione variazionale delle equazioni del moto di un sistema meccanico si basa su un funzionale, detto azione,

$$A = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (14.3.1)$$

definito sulle traiettorie dello spazio delle configurazioni, aventi estremi fissi.

$$A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C} = \{ \mathbf{q}(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{q}(t_a) = \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{q}(t_b) = \mathbf{q}_b \} \quad (14.3.2)$$

Mostriamo che l'azione risulta stazionaria sulla *traiettoria fisica*, definita come quella che soddisfa le equazioni di Lagrange con le condizioni agli estremi assegnate.

Primo principio di Hamilton. Condizione necessaria e sufficiente perché l'azione A sia stazionaria su una traiettoria $\mathbf{q}(t) \in \mathcal{C}$ è che questa soddisfi le equazioni di Lagrange.

La variazione di A sulle traiettorie $\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t)$, dove $\mathbf{h}(t)$ sono nulle agli estremi, è data da

$$A(\mathbf{q} + \mathbf{h}) - A(\mathbf{q}) = \int_{t_a}^{t_b} \sum_{k=1}^d \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right] h_k(t) dt + \mathcal{R} \quad (14.3.3)$$

La condizione sufficiente è immediata perché se \mathbf{q} soddisfa le equazioni di Lagrange il funzionale lineare in \mathbf{h} si annulla. Viceversa se questo funzionale è nullo per ogni variazione, essendo le $h_k(t)$ continue e indipendenti, possono essere scelte tutte nulle tranne una e la somma si riduce ad un sol termine. Dal lemma del calcolo delle variazioni segue che le equazioni di Lagrange debbono esser soddisfatte.

Il principio variazionale può essere formulato considerando l'azione come un funzionale definito sulle traiettorie nello spazio delle fasi. Se

$$\hat{\mathcal{C}} = \{ \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t) : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^{2d}, \quad \mathbf{q}(t_a) = \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{q}(t_b) = \mathbf{q}_b \} \quad (14.3.4)$$

è lo spazio delle traiettorie, riformuliamo il principio variazionale scrivendo l'azione nella forma

$$A = \int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{i=1}^d p_i(t) \dot{q}_i(t) - H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \right] dt \quad (14.3.5)$$

Secondo principio di Hamilton. Condizione necessaria e sufficiente perché l'azione A sia stazionaria su una traiettoria $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathcal{C}$ è che questa soddisfi le equazioni di Hamilton.

Consideriamo le traiettorie variate $\mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t)$, $\mathbf{p}(t) + \boldsymbol{\kappa}(t)$ dove solo $\mathbf{h}(t)$ è nulla agli estremi. La variazione di S è data da

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q} + \mathbf{h}, \mathbf{p} + \boldsymbol{\kappa}) - A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \int_{t_a}^{t_b} \sum_{j=1}^d \left[p_j \dot{h}_j + \dot{q}_j \kappa_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} h_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \kappa_j \right] dt + \mathcal{R} \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \sum_{j=1}^d \left[-(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j}) h_j + (\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}) \kappa_j \right] dt + \mathcal{R} \end{aligned} \quad (14.3.6)$$

dove si è effettuata una integrazione per parti ed il resto \mathcal{R} è del secondo ordine nelle variazioni \mathbf{h} e $\boldsymbol{\kappa}$. Se valgono le equazioni di Hamilton, il funzionale L lineare in \mathbf{h} e $\boldsymbol{\kappa}$ si annulla e viceversa se esso è nullo per qualsiasi scelta di \mathbf{h} e $\boldsymbol{\kappa}$ le equazioni di Hamilton seguono dal lemma del calcolo delle variazioni.

Come esempio di soluzione delle equazioni di Hamilton con condizioni agli estremi su q si considera l'oscillatore il cui Hamiltoniano è $H = \omega(p^2 + q^2)/2$. Se $\omega(t_b - t_a)$ non è un multiplo intero di π la soluzione si scrive

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = R(\omega(t - t_a)) \begin{pmatrix} q_a \\ p_a \end{pmatrix}, \quad p_a = \frac{q_b - q_a \cos \omega(t_b - t_a)}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (14.3.7)$$

14.4. PROBLEMI VARIAZIONALI

Diamo qui la soluzione di alcuni semplici problemi variazionali di natura geometrica e meccanica quali la geodetica sulla sfera, la brachistocrona e il profilo di una corda pesante, che conduce alle stesse equazioni della superficie minima di rivoluzione.

Geodetica sulla sfera

La rappresentazione della sfera unitaria è data da

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta \quad (14.4.1)$$

consideriamo un arco di estremi \mathbf{r}_a e \mathbf{r}_b che è l'immagine della curva $\theta = \theta(\phi)$ nel piano θ, ϕ che ha per estremi i punti (θ_a, ϕ_a) e (θ_b, ϕ_b) . La lunghezza dell'arco sulla sfera è data da

$$\mathcal{F} = \int ds = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta} d\phi, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\phi} \quad (14.4.2)$$

La geodetica è soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange; osserviamo che la funzione $F = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta}$ non dipende da ϕ e quindi le equazioni ammettono un integrale primo H espresso da

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - F = -\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta}} = c \quad (14.4.3)$$

Elevando al quadrato si ottiene

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\sin^4 \theta}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (14.4.4)$$

e la soluzione di questa equazione si ottiene per separazione delle variabili

$$\phi - \phi_* = \int \left(1 - \frac{c^2}{\sin^2 \theta} \right)^{-1/2} \frac{c d\theta}{\sin^2 \theta} \quad (14.4.5)$$

Cambiando variabile di integrazione $t = \cot \theta$ si ottiene

$$\phi - \phi_* = - \int \left(1 - \frac{c^2}{1 - c^2 t^2}\right)^{-1/2} \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} dt = -\arcsin \left(\frac{ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \quad (14.4.6)$$

Essendo $|c| \leq 1$ se poniamo $c(1 - c^2)^{-1/2} = \cot \theta_*$ scriviamo la soluzione

$$\cot \theta_* \cot \theta = \sin(\phi_* - \phi) \quad (14.4.7)$$

dove le costanti θ_* e ϕ_* si determinano imponendo che $\theta(\phi_a) = \theta_a$ e $\theta(\phi_b) = \theta_b$. Se riscriviamo la (14.4.7) nella forma

$$\begin{aligned} \cos \theta_* \cos \theta - \sin \theta \cos \phi \sin \theta_* \sin \phi_* + \sin \theta \sin \phi \sin \theta_* \cos \phi_* = \\ = z \cos \theta_* - x \sin \theta_* \sin \phi_* + y \sin \theta_* \cos \phi_* = 0 \end{aligned} \quad (14.4.8)$$

risulta evidente che la soluzione è la intersezione della sfera con un piano passante per l'origine e quindi la geodetica è un arco di cerchio massimo, vedi figura 14.4.1.

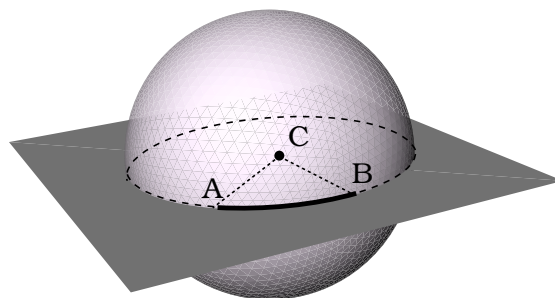


Figura 14.4.1. Geodetica sulla sfera.

Brachistocrona

Un problema variazionale classico è quello della curva con estremi assegnati, lungo la quale il tempo di percorrenza di un grave è minimo. Siano $(x_a = 0, y_a = h)$ e $(x_b = a, y_b = 0)$ gli estremi della curva la cui equazione è $y = y(x)$. Dalla conservazione dell'energia $E = v^2/2 + gy = gh$, scegliendo la massa unitaria, segue che $v = \sqrt{2g(h - y)}$ ed il tempo di percorrenza è dato da

$$F = \int \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{h - y}} dx, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx} \quad (14.4.9)$$

L'integrale primo per le equazioni di Eulero Lagrange è

$$H = -\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \frac{1}{\sqrt{h - y}} = \frac{1}{c} \quad (14.4.10)$$

da cui si ottiene

$$\dot{y}^2 = \frac{c^2}{h-y} - 1 \quad (14.4.11)$$

ponendo

$$h-y = c^2\eta, \quad x = c^2\xi \quad (14.4.12)$$

la soluzione $\xi = \xi(\eta)$ tale che $\xi(0) = 0$ è data da

$$\xi = \int_0^\eta \sqrt{\frac{\eta'}{1-\eta'}} d\eta' = \int_0^\tau 2\sin^2 \tau' d\tau' = \tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau, \quad (14.4.13)$$

avendo posto $\eta = \sin^2 \tau$. Si ottiene quindi

$$\begin{cases} x = c^2\xi = \frac{c^2}{2}(2\tau - \sin 2\tau) \\ y = h - c^2\eta = h - \frac{c^2}{2}(1 - \cos 2\tau) \end{cases} \quad (14.4.14)$$

con $0 \leq \tau \leq \tau_b$, dove τ_b e c sono determinate imponendo che $x(\tau_b) = a$, $y(\tau_b) = 0$. La soluzione è un arco di cicloide con la cuspide nel punto iniziale $(0, h)$. Ricordiamo che la cicloide è la curva descritta da un punto di un cerchio che rotola senza strisciare su una retta.

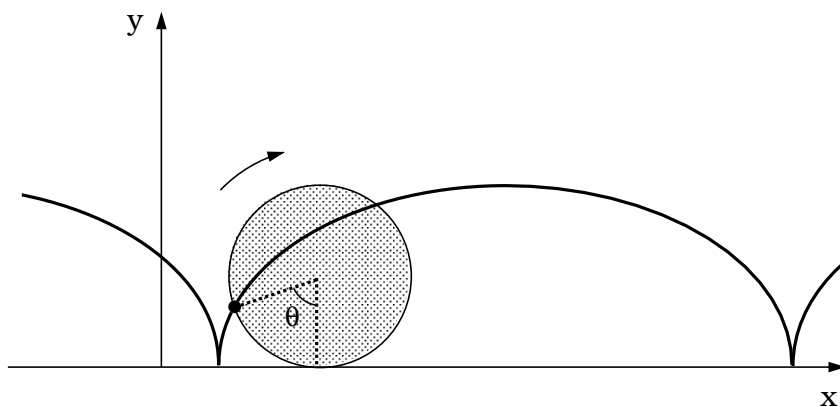


Figura 14.4.2. Cicloide.

Con la scelta dell'angolo come nella figura 14.4.2 si ha, passando con una traslazione dalle coordinate del punto sulla retta a quelle del sistema fisso

$$\begin{cases} x = r\theta + x' = r(\theta - \sin \theta) \\ y = r + y' = r(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (14.4.15)$$

Una soluzione esplicita si può dare solo nel caso in $\tau_b \ll 1$. Infatti allora si ha sviluppando il lato destro di (14.4.14) in serie di Taylor

$$x = \frac{2}{3}c^2\tau^3, \quad y = h - c^2\tau^2 \quad (14.4.16)$$

ed imponendo $x(\tau_b) = a$, $y(\tau_b) = 0$ si ottiene

$$\tau_b = \frac{3}{2} \frac{a}{h}, \quad c = \frac{2}{3} \frac{h^{3/2}}{a}, \quad (14.4.17)$$

e quindi l'approssimazione è valida se $a \ll h$. In questo caso da (14.4.16) e (14.4.17) segue

$$y = h \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} \right) \quad (14.4.18)$$

Si noti che τ_b non è il tempo t_b di percorrenza che sulla brachistocrona; usando (14.4.16) per valutare l'integrale (14.4.9) ove $\dot{y} = -\tau^{-1}$ si ha

$$t_b = \frac{2c}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_b} \sqrt{1 + \tau^2} d\tau = \frac{2c\tau_b}{\sqrt{2g}} \left(1 + \frac{\tau_b^2}{6} + \dots \right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a^2}{h^2} + \dots \right) \quad (14.4.19)$$

L'arco di cicloide corrispondente alla brachistocrona è mostrato nella figura 14.4.3.

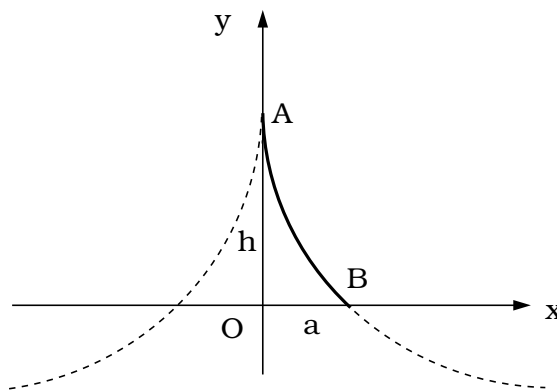


Figura 14.4.3. Brachistocrona.

Profilo di una corda

Un altro problema classico è quello che consiste nel trovare il profilo di equilibrio di una corda pesante con estremi fissi, la cui soluzione è una curva che vien detta appunto catenaria. Il problema si risolve minimizzando il potenziale della forza peso con il vincolo che la massa totale sia costante. Se gli estremi della corda sono $\mathbf{r}_a = (0, 0)$ e $\mathbf{r}_b = (1, 0)$ e se $y = y(x)$ è l'equazione del profilo della corda di densità costante ρ , il potenziale e la massa totale sono dati da

$$V = g \int y \rho ds = \rho g \int_0^1 y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx, \quad M = \rho \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx, \quad (14.4.20)$$

Occorre dunque minimizzare V con il vincolo che M sia costante. Determiniamo il punto di stazionarietà di V usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Questo equivale a cercare la soluzione stazionaria per $F = V - \lambda g M$ imponendo poi che $M = \rho L$ dove L è la lunghezza del filo. L'integrale del moto associato alle equazioni di Eulero Lagrange si ottiene dalla funzione $F = g\rho(y - \lambda)\sqrt{1 + \dot{y}^2}$ e vale

$$H = \dot{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - F = \frac{\lambda - y}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} g\rho = c g\rho \quad (14.4.21)$$

Ponendo $\xi = x/c$ e $\eta = (y - \lambda)/c$ si ottiene la equazione

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = \eta^2 - 1 \quad (14.4.22)$$

la cui soluzione è data da $\eta = \text{ch}(\xi + \xi_0)$ ossia nelle coordinate iniziali $y = \lambda + c \text{ch}(x/c + \xi_0)$. Le condizioni agli estremi $\lambda + c \text{ch}(\xi_0) = \lambda + c \text{ch}(\xi_0 + 1/c) = 0$ risultano soddisfatte per $\xi_0 + c^{-1} = -\xi_0$ e per $\lambda = -c \text{ch}(1/(2c))$. La soluzione diventa

$$y = c \left[\text{ch} \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{2c} \right) - \text{ch} \left(\frac{1}{2c} \right) \right] \quad (14.4.23)$$

dove costante c è determinata da

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \text{sh}^2 \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{2c} \right)} dx \quad (14.4.24)$$

Se L è molto vicino a 1, allora $c^{-1} \ll 1$ e lo sviluppo in serie di Taylor fornisce

$$L = 1 + \frac{1}{2c^2} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx + \dots = 1 + \frac{1}{24c^2} \dots \quad (14.4.25)$$

da cui segue che $c = [24(L - 1)]^{-1/2}$.