

Briciole di Meccanica Classica

Maurizio Serva

Una premessa

Io fingo o suppongo che qualche corpo o punto si muova all'ingiù e all'insù con la nota proporzione et horizontalmente con moto equabile. Quando questo sia io dico che seguirà tutto quello che ha detto il Galileo, et io ancora. Se poi le palle di piombo, di ferro, di pietra non osservano quella supposta proporzione, suo danno, noi diremo che non parliamo di esse. - Evangelista Torricelli (1608-1647).

Un avvertimento

Considerate queste brevi note come una guida che non vi dispensa in alcun modo dal consultare i testi consigliati.

Indice

1 Sistemi vincolati ed equazioni di Lagrange	3
1.1 Equazioni del moto in presenza di vincoli	3
1.2 Principio di D'Alembert ed equazioni di Lagrange	8
1.3 Energia generalizzata e momenti cinetici coniugati a variabili cicliche	13
1.4 Separazione delle variabili e problema dei due corpi	17
1.5 Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange	19
1.6 Simmetrie per un sistema lagrangiano: teorema di Nöther	21
2 Piccole oscillazioni dei sistemi lagrangiani	25
2.1 Equilibrio, stabilità, teorema di Lyapunov e teorema di Dirichlet	25
2.2 Lagrangiana ridotta e soluzione delle equazioni linearizzate	30
3 Principi variazionali	34
3.1 Funzionali, punti stazionari ed equazioni di Eulero-Lagrange	34
3.2 Metodi variazionali in ambiti diversi dalla meccanica	38
4 Sistemi hamiltoniani	46
4.1 Le equazioni di Hamilton	46
4.2 Le parentesi di Poisson	53
4.3 Separabilità e integrali primi	56
5 Trasformazioni canoniche	61
5.1 Trasformazioni canoniche e completamente canoniche	61

5.2 Condizione necessaria e sufficiente per la completa canonicità	64
5.3 Condizione sufficiente per la canonicità	65
5.4 Funzioni generatrici delle trasformazioni canoniche	67
6 Approfondimenti sui sistemi hamiltoniani	72
6.1 Le variabili azione-angolo per sistemi con un grado di libertà	72
6.2 Le variabili azione-angolo per sistemi con più gradi di libertà	76
6.3 Gli invarianti adiabatici	79
6.4 Teorema di Liouville e teorema di ricorrenza di Poincaré	84
Bibliografia	90



1. Sistemi vincolati ed equazioni di Lagrange

1.1 Equazioni del moto in presenza di vincoli

Descrizione e classificazione dei vincoli

Le reazioni vincolari sono forze che è conveniente descrivere in termini degli effetti che producono sul moto del sistema perché è praticamente impossibile assegnar loro un valore a priori. Tali effetti consistono in limitazioni al movimento dei punti materiali sia per quello che riguarda la loro posizione che la loro velocità. I vincoli rappresentano la caratterizzazione geometrica di queste limitazioni.

Ad esempio, un oggetto che è limitato dai suoi movimenti da un piano orizzontale a quota nulla (si pensi al sistema composto da un bicchiere e da un tavolo) può essere schematizzato come un punto materiale (il bicchiere) che soddisfa il vincolo $z \geq 0$. La disuguaglianza indica che il tavolo impedisce l'attraversamento della superficie orizzontale ma non impedisce movimenti verso l'alto. Se invece il punto è vincolato a rimanere sul piano orizzontale senza potersene distaccare basterà imporre la condizione geometrica $z = 0$. In questo secondo caso, ammettendo che il tavolo sia perfettamente liscio (assenza di attrito) e che il punto sia soggetto alla sola forza peso, la reazione vincolare esercitata del tavolo sarà uguale e contraria a questa. Il moto si svolgerà quindi sul piano orizzontale e sarà di tipo rettilineo e uniforme vista l'assenza di forze orizzontali.

In linea teorica le interazioni tra bicchiere e tavolo possono essere descritte in termini di forze ordinarie, sia il tavolo che il bicchiere subiscono una piccola deformazione e le forze inter-molecolari finiscono con l'equilibrare il peso del bicchiere. Tale descrizione è chiaramente troppo complessa per poter essere utilizzata in concreto, è preferibile quindi caratterizzare queste forze in termini delle conseguenze che producono ($z = 0$).

Un ulteriore esempio di sistema vincolato è il bilanciante (quello che usa l'uomo forzuto al circo) che si può schematizzare come un sistema composto da due punti materiali che sono vincolati a rimanere ad una distanza fissa l'uno dall'altro ($|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = d$). Questa caratterizzazione è sostanzialmente corretta nell'ipotesi che il peso dell'asta sia trascurabile così come le dimensioni dei due pesi all'estremità. Naturalmente ognuno dei due punti può essere soggetto a una forza esterna "regolare" come, ad esempio, il peso.

Abbiamo anche detto che i vincoli possono coinvolgere le velocità, ad esempio un oggetto nello spazio che ha un congegno per limitarne la velocità in modo che questa non superi un valore massimo (per emissione di carburante combusto o altro) può essere schematizzato come un punto materiale che soddisfa $|\dot{\mathbf{x}}| \leq v_{max}$. Questo sempre ammettendo che le dimensioni dell'oggetto reale siano trascurabili.

Riassumendo, i vincoli dei tre esempi qui sopra sono rispettivamente caratterizzati dalle equazioni $z \geq 0$, $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| - d = 0$ e $v_{max} - |\dot{\mathbf{x}}| \geq 0$.

Siamo quindi pronti a generalizzare il concetto per un sistema di N punti materiali per il quale diremo che il moto soddisfa il vincolo ϕ se risulta

$$\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) \geq 0, \quad (1)$$

oppure

$$\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N, t) = 0, \quad (2)$$

dove ϕ è una funzione scalare che può dipendere da tutte le posizioni, tutte le velocità e dal tempo. Si noti che il senso della disuguaglianza nella (1) del tutto convenzionale, si può infatti sempre

eseguire la sostituzione $\phi \rightarrow -\phi$. È facile verificare che i tre esempi che abbiamo fatto all'inizio verificano tutti un'equazione del tipo di quelle qui sopra.

In caso di disuguaglianza (1), si parla di vincolo unilatero, mentre in caso di uguaglianza (2) si parla di vincolo bilatero. Nel seguito considereremo esclusivamente vincoli bilateri.

Un vincolo che coinvolge le sole posizioni ed eventualmente il tempo è detto olonomo (primo e secondo esempio), se invece coinvolge le velocità è detto anolonomo (terzo esempio). Tuttavia in alcuni casi un vincolo che coinvolge anche le velocità può essere ricondotto ad un vincolo olonomo mediante integrazione. In tal caso si parla di vincolo integrabile. Ad esempio il vincolo $\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{a} = 0$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ è anolonomo, tuttavia per integrazione si ottiene $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{a}t - \mathbf{b} = 0$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ che è olonomo. Nel seguito considereremo soltanto vincoli olonomi, includendo tra questi gli anolonomi integrabili (dopo averli riformulati come olonomi).

Riassumendo, considereremo soltanto vincoli bilaterali e olonomi definiti da un'equazione

$$\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0. \quad (3)$$

Nel caso in cui ϕ è indipendente dal tempo t si parlerà di vincolo fissi, altrimenti di vincoli mobili. Noi considereremo entrambi i casi. È facile comprendere il significato di questa definizione, si pensi ad esempio a un punto materiale con il vincolo $|\mathbf{x}|^2 - a^2 - b^2t = 0$ con a e b reali. Il punto è vincolato alla superficie di una sfera, Se b è nullo non c'è dipendenza dal tempo e la sfera è di raggio costante, altrimenti c'è dipendenza dal tempo e la sfera ha un raggio che cresce con il tempo.

In generale un sistema di punti materiali può essere soggetto ad ℓ vincoli con $0 \leq \ell < 3N$. Possiamo quindi scrivere per questi vincoli le ℓ equazioni

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= 0, \\ \phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \phi_\ell(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Nel caso in cui $\ell = 0$, in realtà non ci sono vincoli e possono agire solo le eventuali forze "ordinarie", cerchiamo invece di capire perché è necessario che $\ell < 3N$.

Prima di parlare del caso generale consideriamo un singolo punto materiale. Se c'è un solo vincolo avremo soltanto $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$. Questa equazione implica che il punto è confinato ad una superficie, se ad esempio $\phi = \frac{x^2+y^2}{2} - z$ il punto è vincolato a un paraboloido. Se ci sono due vincoli $\phi_1(\mathbf{x}, t) = 0$ e $\phi_2(\mathbf{x}, t) = 0$ il punto è confinato ad una curva, se ad esempio $\phi_1 = \frac{x^2+y^2}{2} - z$ e $\phi_2 = y$ il punto è vincolato a una parabola appartenente al piano xz di equazione $z = \frac{x^2}{2}$, $y = 0$. Invece se ci fossero tre vincoli, ad esempio $\phi_1 = \frac{x^2+y^2}{2} - z = 0$, $\phi_2(\mathbf{x}, t) = y = 0$ e $\phi_3 = z = c$, il sistema risulterebbe confinato a due punti per $c > 0$, a un solo punto per $c = 0$ e non potrebbe occupare nessun punto per $c < 0$. In tutti e tre i casi il sistema non potrebbe avere un suo moto.

Questa considerazione si estende facilmente al caso in cui il sistema sia composto da N punti, per un numero ℓ di vincoli svolge il suo moto su una varietà con dimensionalità

$$n = 3N - \ell \quad (5)$$

e questo spiega perché sia necessario che $0 \leq \ell < 3N$.

Tuttavia bisogna stare attenti anche nel caso in cui $0 \leq \ell < 3N$, è necessario infatti (A) che i vincoli siano compatibili ossia che l'insieme determinato dalle equazioni vincolari non sia vuoto o composto soltanto da punti isolati e (B) che le equazioni non siano ridondanti, ossia che siano indipendenti tra di loro. Ad esempio i vincoli $z - a = 0$ e $z - b = 0$ non implicano che il

punto materiale sia su una curva, al contrario se $a = b$ esso è su un piano orizzontale (caso B, vincoli ridondanti) mentre se $a \neq b$ il sistema non può occupare nessun punto (caso A, vincoli incompatibili).

Se si evitano queste anomalie, il sistema sarà invece su una varietà vincolare con dimensionalità $n = 3N - \ell$ cosicché, in linea di principio, la sua posizione potrà essere individuata specificando il valore di n variabili che chiameremo lagrangiane per motivi che saranno chiari in seguito.

Equazioni del moto, soluzioni e determinazione delle reazioni vincolari

Cerchiamo ora di capire come risolvere le equazioni del moto, sempre limitandoci a considerare vincoli olonomi e bilateri. Partiamo col caso più semplice, quello di un singolo punto materiale soggetto a una forza "regolare" \mathbf{f} e a una reazione vincolare \mathbf{r} . Potremo quindi scrivere l'equazione di Newton nella forma

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{r}. \quad (6)$$

Le incognite in questa equazione sono sei: le tre componenti della posizione e le tre componenti della reazione vincolare. Supponiamo che il punto sia vincolato ad una superficie con equazione $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$, che aggiunta alle tre equazioni scalari di Newton (6) porta a un totale di quattro equazioni. Il conto non torna, sei incognite ma soltanto quattro equazioni. Aggiungiamo quindi l'ulteriore ipotesi che i vincoli siano lisci, ossia che non siano presenti forze di attrito. In tal caso la reazione vincolare dovrà essere normale alla superficie al tempo t e quindi parallela al vettore $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ (semplice geometria). Possiamo quindi scrivere $\mathbf{r} = \lambda\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ dove λ è una costante scalare incognita, cosicché l'insieme delle quattro equazioni può essere posto nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f} + \lambda\nabla\phi(\mathbf{x}, t), \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

dove compaiono soltanto quattro incognite (le tre componenti della posizione e la variabile λ). Il problema è quindi ben posto e, in linea di principio, può essere risolto.

Se il punto è invece vincolato ad una curva avremo due equazioni $\phi_1(\mathbf{x}, t) = 0$ e $\phi_2(\mathbf{x}, t) = 0$ che vanno aggiunte alle tre componenti della equazione di Newton, per un totale di 5. Anche in questo caso possiamo risolvere perché entrambi i vettori $\nabla\phi_1(\mathbf{x}, t)$ e $\nabla\phi_2(\mathbf{x}, t)$ sono normali alla curva nel punto \mathbf{x} al tempo t e quindi anche ogni loro combinazione lineare. La reazione vincolare può quindi essere espressa come $\mathbf{r} = \lambda_1\nabla\phi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2\nabla\phi_2(\mathbf{x}, t)$ dove λ_1 e λ_2 sono costanti scalari incognite. L'insieme delle cinque equazioni può essere quindi formulato come segue:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f} + \lambda_1\nabla\phi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2\nabla\phi_2(\mathbf{x}, t), \\ \phi_1(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \phi_2(\mathbf{x}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

dove compaiono soltanto cinque incognite. Anche in questo caso il problema è ben posto e, in linea di principio, può essere risolto. Per entrambi i casi considerati la soluzione del problema fornisce la posizione del sistema e il valore della reazione vincolare ad ogni istante t .

Si intuisce facilmente come generalizzare al caso di un sistema di N punti materiali. La posizione nello spazio delle configurazioni è un vettore a $3N$ componenti $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ (si faccia attenzione perché ora il simbolo \mathbf{x} indica la globalità delle posizioni) ed quindi è possibile definire il relativo gradiente come un vettore a $3N$ componenti $\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_N)$ (anche in questo caso si faccia attenzione a non fare confusione, ∇ contiene le derivate rispetto a tutte le $3N$ variabili cartesiane). La geometria ci informa che tutti i vettori $\nabla\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, \ell$, sono normali alla varietà nel punto \mathbf{x} al tempo t , come anche ogni loro combinazione lineare.

La reazione vincolare a $3N$ componenti $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ può quindi essere espressa come

$$\mathbf{r} = \lambda_1 \nabla \phi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2 \nabla \phi_2(\mathbf{x}, t) \dots \lambda_\ell \nabla \phi_\ell(\mathbf{x}, t). \quad (9)$$

Quest'ultima uguaglianza equivale a dire che

$$\mathbf{r}_i = \lambda_1 \nabla_i \phi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2 \nabla_i \phi_2(\mathbf{x}, t) \dots \lambda_\ell \nabla_i \phi_\ell(\mathbf{x}, t) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Si ottiene quindi il seguente sistema di $3N + \ell$ equazioni per altrettante incognite:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i + \lambda_1 \nabla_i \phi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2 \nabla_i \phi_2(\mathbf{x}, t) \dots \lambda_\ell \nabla_i \phi_\ell(\mathbf{x}, t) \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \phi_\alpha(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (11)$$

Anche in questo caso generale la soluzione del problema fornisce la posizione del sistema e i valori delle reazioni vincolari ad ogni istante t .

Avrete forse avuto la sensazione che questo approccio non sia molto astuto, sappiamo che il sistema è vincolato a una varietà con dimensione $n = 3N - \ell$ e quindi può essere individuato specificando il valore di altrettante variabili. Invece, siamo costretti a misurarci con un sistema di $3N + \ell$ equazioni per altrettante variabili. Vedremo nel seguito che esiste un altro approccio, quello di Lagrange, che permette di semplificare notevolmente l'apparato matematico e soprattutto di riformulare il problema come un sistema di $n = 3N - \ell$ equazioni per altrettante variabili.

Esercizi svolti

- Si consideri un punto materiale pesante di massa m vincolato al piano $z = 0$. Si risolva il problema tenendo presente che ci sono quattro incognite per altrettante equazioni.

Punto materiale pesante significa soggetto alla forza peso $\mathbf{f} = -mg(0, 0, 1)$. L'equazione del vincolo è $\phi(\mathbf{x}) = z = 0$ per cui $\nabla \phi = (0, 0, 1)$ e la reazione vincolare è $\mathbf{r} = \lambda(0, 0, 1)$. Le $3N + \ell = 3 + 1 = 4$ equazioni differenziali sono quindi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda, \\ z &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

che hanno la semplice soluzione $x = at + b$, $y = ct + d$, $z = 0$ e $\lambda = mg$ dove (a, c) è la velocità orizzontale iniziale e (b, d) è la posizione iniziale sul piano. La reazione vincolare è $\mathbf{r} = \lambda \nabla \phi = mg(0, 0, 1) = -\mathbf{f}$.

- Si consideri un punto materiale pesante di massa m vincolato alla retta $x = z$, $y = 0$. Si risolva il problema tenendo presente che ci sono cinque incognite per altrettante equazioni.

Le equazioni dei vincoli sono $\phi_1(\mathbf{x}) = x - z = 0$ e $\phi_2(\mathbf{x}) = y = 0$ per cui $\nabla \phi_1 = (1, 0, -1)$ e $\nabla \phi_2 = (0, 1, 0)$. Le $3N + \ell = 3 + 2 = 5$ equazioni differenziali sono quindi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1, \\ m\ddot{y} &= \lambda_2, \\ m\ddot{z} &= -mg - \lambda_1, \\ x - z &= 0, \\ y &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

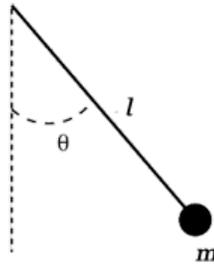
che hanno la semplice soluzione $x = z = \frac{gt^2}{4} + at + b$, $y = 0$, $\lambda_1 = -\frac{mg}{2}$ e $\lambda_2 = 0$ dove a e b sono rispettivamente la velocità e la posizione iniziale sia per z che per x . La reazione vincolare è $\lambda_1 \nabla \phi_1 + \lambda_2 \nabla \phi_2 = -\frac{mg}{2}(1, 0, -1)$ che è normale alla retta sul piano xz .

- Si consideri un pendolo semplice, ossia un punto materiale pesante di massa m vincolato ad un piano verticale xz e vincolato a mantenere una distanza fissa l da un punto fisso (l'origine). Si risolva il problema tenendo presente che ci sono cinque incognite per altrettante equazioni.

Le equazioni dei vincoli sono $\phi_1(\mathbf{x}) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$ e $\phi_2(\mathbf{x}) = y = 0$ per cui $\nabla \phi_1 = (2x, 0, 2z)$ e $\nabla \phi_2 = (0, 1, 0)$. Le $3N + \ell = 3 + 2 = 5$ equazioni differenziali sono quindi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda_1 x, \\ m\ddot{y} &= \lambda_2, \\ m\ddot{z} &= -mg + 2\lambda_1 z, \\ x^2 + z^2 - l^2 &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Si vede immediatamente che $y = 0$ e $\lambda_2 = 0$, ci conviene poi sfruttare la prima equazione vincolare ($x^2 + z^2 - l^2 = 0$) per scrivere z e x in funzione di un una sola variabile che è l'angolo θ che il pendolo forma con la verticale discendente, avremo quindi $x = l \sin(\theta)$ e $z = -l \cos(\theta)$,



infine sfruttiamo la prima e la terza equazione per scrivere $\ddot{x}z - \ddot{z}x = gx$ che riespressa in termini della variabile θ diventa, dopo un po' di lavoro, l'equazione classica del pendolo

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta). \tag{15}$$

Da questa equazione ricaviamo $\theta(t)$ in funzione del tempo (ad esempio col metodo delle quadrature) e quindi troviamo anche $x(t) = l \sin(\theta)$ e $z(t) = -l \cos(\theta)$. Infine sostituendo $x(t)$ nella prima equazione troveremo anche $\lambda_1(t) = \frac{m\ddot{x}}{2x}$ che può essere espressa in funzione di θ e derivate. La reazione vincolare è $\lambda_1 \nabla \phi_1 + \lambda_2 \nabla \phi_2 = \frac{m\ddot{x}}{x}(x, 0, z)$ che è normale alla circonferenza sul piano xz .

- Si consideri un manubrio, ossia un sistema composto da due punti materiali pesanti di uguale massa m vincolati a mantenere una distanza fissa l'uno dall'altro. Entrambi i punti siano inoltre vincolati ad un piano orizzontale xy . Si risolva il problema tenendo presente che ci sono nove incognite per altrettante equazioni.

Le equazioni dei vincoli sono $\phi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = z_1 = 0$, $\phi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = z_2 = 0$ e $\phi_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 - d^2 = 0$. Si avrà quindi $\nabla_1 \phi_1 = (0, 0, 1)$, $\nabla_2 \phi_1 = 0$, $\nabla_1 \phi_2 = 0$, $\nabla_2 \phi_2 = (0, 0, 1)$, $\nabla_1 \phi_3 = 2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ e $\nabla_2 \phi_3 = -2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$.

Le $3N + \ell = 3 \cdot 2 + 3 = 9$ equazioni differenziali scalari sono quindi:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_1 &= -mg(0, 0, 1) + 2\lambda_3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \lambda_1(0, 0, 1), \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 &= -mg(0, 0, 1) - 2\lambda_3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \lambda_2(0, 0, 1), \\ |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 &= d^2, \\ z_1 = z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Tenendo presente che $z_1 = z_2 = 0$, dalla terza equazione scalare e dalla sesta si trova immediatamente anche $\lambda_1 = \lambda_2 = mg$. Le restanti cinque equazioni possono essere scritte come

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 2\lambda_3(x_1 - x_2), & m\ddot{y}_1 &= 2\lambda_3(y_1 - y_2), \\ m\ddot{x}_2 &= -2\lambda_3(x_1 - x_2), & m\ddot{y}_2 &= -2\lambda_3(y_1 - y_2), \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= d^2. \end{aligned} \quad (17)$$

È utile eseguire un cambiamento di variabili in modo da separare il moto del baricentro da quello della posizione relativa, scriviamo quindi: $x_g = (x_1 + x_2)/2$, $y_g = (y_1 + y_2)/2$, $x = (x_1 - x_2)$ e $y = (y_1 - y_2)$. Le equazioni per queste variabili si ottengono facilmente dalle (17):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_g &= 0, & m\ddot{y}_g &= 0, \\ m\ddot{x} &= 4\lambda_3x, & m\ddot{y} &= 4\lambda_3y, \\ x^2 + y^2 &= d^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Il baricentro si muove quindi di moto uniforme sul piano ($x_g = at + b$, $y_g = ct + d$) mentre la quinta equazione ci permette di esprimere x e y in funzione dell'angolo θ tra l'asta del manubrio e la retta orizzontale che passa per il baricentro, ossia: $x = d \cos(\theta)$ e $y = d \sin(\theta)$. Sostituendo nella terza e nella quarta equazione, dopo aver eseguito qualche semplice conto, otteniamo

$$\begin{aligned} \ddot{x}y - \dot{y}x &= 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \omega t + \theta_0, \\ \lambda_3 &= \frac{m\ddot{x}}{4x} = -\frac{m\omega^2}{4}, \end{aligned} \quad (19)$$

dove ω è la velocità angolare costante. Otteniamo infine le reazioni vincolari $\mathbf{r}_1 = mg(0, 0, 1) - m\omega^2 \frac{d}{2}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ e $\mathbf{r}_2 = mg(0, 0, 1) + m\omega^2 \frac{d}{2}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. La componente di r_1 parallela al piano è quella che il secondo punto esercita sul primo (quella che il primo esercita sul secondo è uguale e contraria). Questa componente è diretta lungo la congiungente i due punti ed è quella necessaria a bilanciare esattamente la forza centrifuga dovuta alla rotazione (si tenga presente ognuno dei due punti ruota intorno al baricentro a una distanza $d/2$). Le componenti normali al piano delle reazioni vincolari sono uguali e contrarie alla forza peso.

1.2 Principio di D'Alembert ed equazioni di Lagrange

Velocità virtuali e principio di D'Alembert

Esponiamo qui il principio di D'Alembert, primo passo per costruire il formalismo lagrangiano. Iniziamo con la seguente definizione:

Data una configurazione del sistema $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ compatibile con i vincoli al tempo t , si dice *atto di moto virtuale* ogni vettore a $3N$ componenti $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \dots, \boldsymbol{\nu}_N)$ tangente alla varietà vincolare in \mathbf{x} al tempo t . I vettori $\boldsymbol{\nu}_i$ sono detti *velocità virtuali*.

Per ogni vincolo $\phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0$, il vettore a $3N$ componenti $\nabla\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)$ è normale alla superficie vincolare al tempo t , si ha quindi

$$\nabla\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu} = \nabla_1\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}_1 + \nabla_2\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}_2 + \dots + \nabla_N\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu}_N = 0 \quad (20)$$

per ogni α e per ogni atto di moto virtuale.

In effetti le $\boldsymbol{\nu}_i$ sono le velocità che il sistema potrebbe assumere in \mathbf{x} al tempo t se la varietà vincolare fissa (congelata) a quell'istante. Quindi per vincoli fissi le velocità possibili, ossia quelle che il sistema può effettivamente espletare, coincidono con le virtuali, altrimenti questo non è in generale vero.

Per chiarire questo punto teniamo presente che per un sistema vincolato $\phi_\alpha(\mathbf{x}(t), t) = 0$ per ogni t e per ogni α , quindi necessariamente

$$\frac{d\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)}{dt} = \nabla_1\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}}_1 + \nabla_2\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}}_2 + \dots + \nabla_N\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}}_N + \frac{\partial\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (21)$$

Le ℓ equazioni (20) coincidono con le (21) soltanto se il vincolo è fisso, quindi il vettore a $3N$ componenti $\dot{\mathbf{x}}$ può coincidere con il vettore $\boldsymbol{\nu}$ soltanto in questo caso. Per un vincolo mobile, in generale, il vettore $\dot{\mathbf{x}}$ non è tangente alla varietà. Si pensi ad esempio a un punto vincolato ad una superficie di una sfera che si espande, se il punto si trova al polo nord ogni velocità virtuale giace sul piano orizzontale tangente alla sfera nel polo, mentre ogni velocità possibile ha anche una componente verticale dovuta all'espansione.

Possiamo ora definire un sistema di vincoli *ideali* o *perfetti* come segue.

Un sistema di punti è soggetto a vincoli *ideali* o *perfetti* se l'equazione

$$\mathbf{r}\boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i\boldsymbol{\nu}_i = 0 \quad (22)$$

è soddisfatta per ogni atto di moto virtuale $\boldsymbol{\nu}$ e per ogni sistema di reazioni vincolari \mathbf{r} che il sistema può espletare a partire da ogni configurazione \mathbf{x} compatibile con i vincoli al tempo t . La quantità $\mathbf{r}\boldsymbol{\nu}$ è detta *potenza virtuale*. Per quello che abbiamo detto in precedenza risulta evidente che i vincoli olonomi, bilateri e lisci sono perfetti, dato che \mathbf{r} è normale alla varietà mentre l'atto di moto $\boldsymbol{\nu}$ è tangente ad essa.

Concludiamo questo preambolo con un'ultima definizione.

Dato il sistema di equazioni del moto

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{r}_i, \quad (23)$$

diremo che un moto $\mathbf{x}(t)$ compatibile con i vincoli è un *moto naturale* o *moto effettivo* se esso risolve tali equazioni in corrispondenza di un sistema di reazioni $\mathbf{r}(t)$ che i vincoli sono effettivamente in grado di espletare.

Possiamo finalmente enunciare (e poi dimostrare) il principio di D'Alembert: i moti naturali sono tutti e solo quei moti $\mathbf{x}(t)$ compatibili con vincoli perfetti per i quali ad ogni istante t si verifica:

$$\sum_{i=1}^N (m_i\ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{f}_i)\boldsymbol{\nu}_i = 0. \quad (24)$$



Figura 1. Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert (Parigi, 16 novembre 1717 - Parigi, 29 ottobre 1783) è stato un enciclopedista, matematico, fisico, filosofo e astronomo francese, tra i più importanti protagonisti dell'Illuminismo.

La necessità, ovvero il fatto che se $\mathbf{x}(t)$ è un moto naturale, ossia soddisfa la (23), allora soddisfa anche la (24) è di dimostrazione quasi banale, infatti basta moltiplicare scalarmente entrambi i membri della (23) per $\boldsymbol{\nu}_i$ e successivamente sommare da 1 a N per ricavare $\sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) \boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \boldsymbol{\nu}_i$ e quindi, data la caratterizzazione (22) dei vincoli perfetti, ottenere la (24).

Per quel che riguarda la sufficienza basterà osservare che se $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione della (24) possiamo definire i vettori $\mathbf{r}_i(t) = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t), t)$. Tali vettori, per via della (24) soddisfano l'uguaglianza $\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \boldsymbol{\nu}_i = 0$ e quindi sono reazioni vincolari compatibili con vincoli perfetti. In definitiva abbiamo che le $\mathbf{x}_i(t)$ soddisfano le equazioni (23) in corrispondenza di reazioni $\mathbf{r}_i(t)$ che i vincoli possono effettivamente espletare e quindi sono moti naturali.

Le equazioni di Lagrange

È utile introdurre la nozione di *spostamento virtuale* $\delta \mathbf{x}$ definito come la variazione infinitesima delle coordinate del sistema a tempo mantenuto costante. Lo spostamento è definito virtuale perché nessuno spostamento può effettivamente avvenire a tempo costante. Confrontando con la definizione di atto di moto virtuale risulta evidente che questo coincide sostanzialmente con lo spostamento virtuale con la differenza che il primo è inteso come vettore finito mentre il secondo come vettore infinitesimo. Formalmente possiamo scrivere $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\nu} \delta t$, dove δt è uno scalare infinitesimo che possiamo pensare come un incremento temporale fittizio. Ovviamente questa definizione implica $\delta \mathbf{x}_i = \boldsymbol{\nu}_i \delta t$ per ogni i e quindi la (24) può essere riscritta come

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{f}_i) \delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (25)$$

La configurazione \mathbf{x} di un punto materiale che appartiene a una varietà con $n = 3N - \ell$ dimensioni può essere espressa in funzione di n variabili lagrangiane q_m con $m = 1, 2, \dots, n$. Possiamo scrivere quindi

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t), \quad (26)$$

dove al solito $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$, mentre $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Il tempo t compare in modo esplicito quando il vincolo è mobile.

La scelta delle coordinate lagrangiane non è univoca, al contrario, potenzialmente infinite scelte sono possibili. Ad esempio per un punto materiale vincolato ad un paraboloide $z - x^2 - y^2 = 0$ ($n = 2$) possiamo scegliere come variabili lagrangiane le due variabili cartesiane x e y . In tal caso $\mathbf{x} = (x, y, x^2 + y^2)$ che equivale a dire $x = x$, $y = y$ e $z = x^2 + y^2$. Tuttavia possiamo scegliere anche le coordinate polari ρ e θ e in tal caso $\mathbf{x} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho^2)$ che equivale a dire $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$ e $z = \rho^2$.

Tenendo presente la (26), otteniamo facilmente che gli spostamenti possibili possono essere espressi come segue:

$$d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt. \quad (27)$$

Il sistema rimane sulla varietà vincolare fissa o mobile per ogni possibile scelta degli incrementi infinitesimi dq_m . L'ultimo termine a destra dell'equazione è presente quando il vincolo è mobile (in tal caso nella (26) compare esplicitamente il tempo). Analogamente troviamo che gli spostamenti virtuali sono esprimibili come segue:

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_m} \delta q_m. \quad (28)$$

Questi spostamenti, per ogni possibile scelta degli incrementi infinitesimi δq_m , lasciano il sistema sulla varietà a tempo invariato, ossia sulla varietà *congelata* al tempo t . Gli spostamenti possibili e quelli virtuali coincidono quanto il vincolo è fisso e nella (26) non compare esplicitamente il tempo.

Sostituendo la (28) nella (25) e invertendo l'ordine con il quale eseguiamo le due somme, si ottiene

$$\sum_{m=1}^n \left[\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{f}_i) \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} \right] \delta \mathbf{q}_m = 0. \quad (29)$$

Questa equazione deve valere per ogni possibile scelta degli incrementi infinitesimi δq_m , questo implica che per ogni $m = 1, 2, \dots, n$ deve valere

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{f}_i) \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} = 0. \quad (30)$$

Per convincerci di questo supponiamo di porre $\delta q_m = 0$ per tutti gli m eccetto per $m = 1$, in questo caso l'equazione sopra deve necessariamente essere verificata per $m = 1$, stessa cosa si può fare per $m = 2$ e così via. Si noti che dalla (25) non possiamo arrivare a un'analogia conclusione perché gli incrementi infinitesimi $\delta \mathbf{x}_i$, a differenza degli incrementi $\delta \mathbf{q}_m$, non sono arbitrari.

Le $n = 3N - \ell$ equazioni (30) sono proprio le equazioni di Lagrange, dove è inteso che forze, posizioni e accelerazioni, sono espresse in funzione delle variabili lagrangiane e relative derivate.

Per esercizio si consideri nuovamente il pendolo semplice, per questo problema $n = 3N - \ell = 3 - 2 = 1$, potremo quindi scegliere come unica variabile lagrangiana l'angolo θ che il pendolo forma con la verticale discendente, come nel terzo esercizio del paragrafo 1.1. Avremo quindi la sola equazione di Lagrange $(m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = 0$, dove $\ddot{\mathbf{x}}(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}(\theta)$ sono calcolati a partire da $\mathbf{x} = l(\sin(\theta), 0, -\cos(\theta))$ e dove $\mathbf{f} = -mg(0, 0, 1)$.

La lagrangiana e le equazioni di Lagrange nel caso di forze conservative

Per utilizzare le equazioni (30) è estremamente utile darle una formulazione semplificata. Per raggiungere questo scopo scriviamo preliminarmente la derivata totale della posizione $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(\mathbf{q}(t), t)$ dell' i -esimo punto materiale al tempo t :

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad (31)$$

che implica banalmente

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l}, \quad (32)$$

per ogni l . La (31) implica anche

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_l} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_l \partial t} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \right). \quad (33)$$

A questo punto se definiamo l'energia cinetica T in funzione delle variabili lagrangiane come

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)|^2, \quad (34)$$

è facile verificare con l'ausilio della (32) e della (33) che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_m} + \dot{\mathbf{x}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_m} - \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_m} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m}. \quad (35)$$

Le equazioni di Lagrange (30) assumono quindi la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m}. \quad (36)$$

Infine, se le forze \mathbf{f}_i sono posizionali e conservative le equazioni si semplificano ulteriormente, avremo infatti:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} = - \frac{\partial V}{\partial q_m}, \quad (37)$$

dove $V = V(\mathbf{q}, t) = V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t))$. Possiamo sostituire l'espressione a destra nella (37) al posto dell'espressione a destra nella (36) e tenendo conto che il potenziale $V(\mathbf{q}, t)$ non dipende esplicitamente dalle velocità generalizzate $\dot{\mathbf{q}}$, possiamo finalmente scrivere le n equazioni di Lagrange nella forma classica

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0, \quad (38)$$

dove L è la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)|^2 - V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)). \quad (39)$$

Queste $n = 3N - \ell$ per altrettante incognite rappresentano una notevole semplificazione sia rispetto al sistema di $3N + \ell$ equazioni utilizzato nel paragrafo 1.1, sia rispetto alle equazioni (30).

Come esempio si consideri ancora una volta il pendolo semplice. Avremo $\mathbf{x} = l(\sin(\theta), 0, -\cos(\theta))$ e quindi $\dot{\mathbf{x}} = l(\cos(\theta)\dot{\theta}, 0, \sin(\theta)\dot{\theta})$. L'energia cinetica è $T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$ mentre il potenziale è $V = mgz = -mgl \cos(\theta)$. La lagrangiana è quindi

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta), \quad (40)$$

e l'unica equazione di Lagrange è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta). \quad (41)$$

Tutto molto più semplice ed elegante sia rispetto alla procedura che abbiamo seguito nel paragrafo 1.1, sia rispetto all'utilizzo delle equazioni (30).

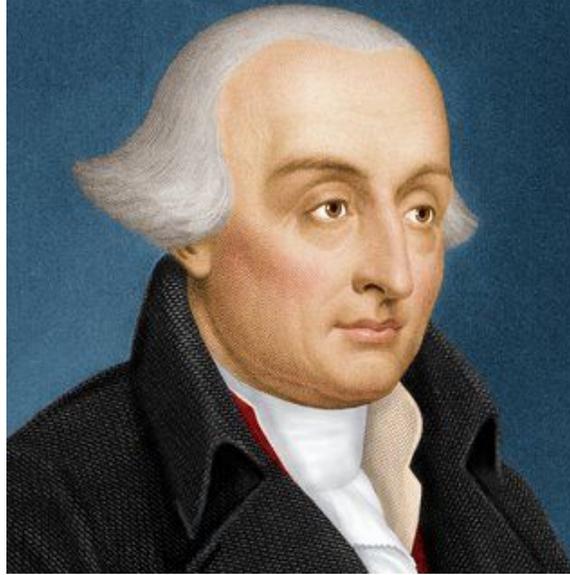


Figura 2. Joseph-Louis Lagrange, nato Giuseppe Luigi Lagrangia (Torino, 25 gennaio 1736 - Parigi, 10 aprile 1813), è stato un matematico e astronomo italiano attivo per ventuno anni a Berlino e per ventisei a Parigi. Viene unanimemente considerato tra i maggiori e più influenti matematici europei del XVIII secolo. La sua più importante opera è la *Mécanique Analytique*, pubblicata nel 1788, con cui nasce convenzionalmente la meccanica razionale.

1.3 Energia generalizzata e momenti cinetici coniugati a variabili cicliche

Espressione esplicita della lagrangiana

Abbiamo visto che per un atto di moto virtuale olonomo, bilatero e liscio possiamo scrivere le coordinate \mathbf{x}_i di un punto materiale e la relativa derivata totale rispetto al tempo $\dot{\mathbf{x}}_i$ come

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad (42)$$

dove $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$. Per l'energia cinetica, usando la (42), possiamo quindi scrivere

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l \dot{q}_m + \sum_l b_l(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l + \frac{1}{2} c(\mathbf{q}, t), \quad (43)$$

dove le somme su l ed m vanno da 1 a n e dove

$$a_{l,m}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m}, \quad b_l(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad c(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad (44)$$

con $a_{l,m}(\mathbf{q}, t) = a_{m,l}(\mathbf{q}, t)$. Per l'energia potenziale possiamo invece scrivere

$$V = V(\mathbf{x}_1(\mathbf{q}, t), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{q}, t)) = V(\mathbf{q}, t). \quad (45)$$

In definitiva la lagrangiana di un sistema meccanico nella sua forma più generale è sempre scritta come segue:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l \dot{q}_m + \sum_l b_l(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l + \frac{1}{2} c(\mathbf{q}, t) - V(\mathbf{q}, t), \quad (46)$$

che nel caso in cui i vincoli siano fissi $(\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_m \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m)$ diventa

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}) \dot{q}_l \dot{q}_m - V(\mathbf{q}). \quad (47)$$

Si noti che in questo caso la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.

Assenza di vincoli

In assenza di vincoli, se si scelgono le variabili cartesiane di ciascun punto materiale come variabili lagrangiane, le equazioni di Lagrange coincidono con le equazioni di Newton. Si consideri un generico sistema meccanico conservativo di N punti materiali privo di vincoli con energia cinetica e potenziale

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2, \quad V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (48)$$

se scegliamo come variabili lagrangiane le $n = 3N$ variabili cartesiane $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$, avremo la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N). \quad (49)$$

Le $3N$ equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, N, \quad (50)$$

che si riscrivono immediatamente come

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (51)$$

e che infine, riscritte in forma vettoriale, non sono altro che le equazioni di Newton:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_i V. \quad (52)$$

Abbiamo quindi mostrato che in assenza di vincoli le equazioni di Lagrange coincidono con le equazioni di Newton se si scelgono le variabili cartesiane di ciascun punto materiale come variabili lagrangiane. Tuttavia, possiamo fare altre scelte che conducono a equazioni diverse. Consideriamo ad esempio un singolo punto materiale pesante nello spazio tridimensionale soggetto ad una forza di tipo elastico. Avremo:

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2, \quad V = \frac{k}{2}|\mathbf{x}|^2 + mgz. \quad (53)$$

Se scegliamo come variabili lagrangiane le tre variabili cartesiane arriviamo all'equazione di Newton

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x} - mg\mathbf{k}, \quad (54)$$

dove $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ è il versore verticale. Tuttavia possiamo fare un'altra scelta, ad esempio le variabili sferiche o le variabili cilindriche, per quest'ultime avremo

$$\mathbf{x} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z), \quad \dot{\mathbf{x}} = (\dot{\rho} \cos(\theta) - \dot{\theta} \rho \sin(\theta), \dot{\rho} \sin(\theta) + \dot{\theta} \rho \cos(\theta), \dot{z}). \quad (55)$$

Per queste variabili la lagrangiana assume la forma

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2}(\rho^2 + z^2) - mgz \quad (56)$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad m \frac{d(\rho^2 \dot{\theta})}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad m\rho^2 \ddot{\theta} + 2m\rho \dot{\rho} \dot{\theta} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad \rightarrow \quad m \frac{d\dot{\rho}}{dt} - m\dot{\theta}^2 \rho + k\rho = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{\rho} = (m\dot{\theta}^2 - k)\rho, \quad (58)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad m \frac{d\dot{z}}{dt} + kz + mg = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = -kz - mg, \quad (59)$$

che possono eventualmente essere risolte. Ad esempio, dall'equazione al centro nella prima riga ricaviamo $m\rho^2\dot{\theta} = J$, dove la costante J è la componente verticale del momento angolare, sostituendo $\dot{\theta}$ con $J/m\rho^2$ nella seconda equazione otteniamo un'equazione differenziale per la sola ρ che può eventualmente essere risolta col metodo delle quadrature. La $\rho(t)$ così trovata e la conservazione della componente verticale del momento angolare possono essere usati per scrivere $\dot{\theta} = J/m\rho^2(t)$, dalla quale $\theta(t)$ si ricava per semplice integrazione. Infine la terza equazione è di banale soluzione.

In conclusione, possiamo dire che anche in assenza di vincoli la meccanica newtoniana è un caso particolare di quella lagrangiana. Tuttavia, si deve tener conto che le equazioni di Newton, che si applicano a variabili cartesiane, possono sempre essere utilizzate per ottenere quelle di qualsiasi altra variabile che è una funzione di queste. Diciamo che da questo punto di vista, per sistemi non vincolati, per i quali $n = 3N$, il vantaggio del formalismo lagrangiano è solo quello di permettere di scrivere *ab initio* le equazioni per qualsiasi n -pla di variabili indipendenti.

Energie e variabili cicliche

In assenza di vincoli sappiamo che l'energia meccanica $E = T + V$ si conserva (si dice anche che è un integrale primo). Questo significa che E è costante lungo le traiettorie, ovvero che la sua derivata totale rispetto al tempo $\frac{dE}{dt}$ è nulla. Ci si chiede se esiste e a quali condizioni un'analogia legge di conservazione per i sistemi vincolati.

Definiamo l'energia generalizzata al tempo t come segue:

$$E(t) = E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (60)$$

dove l'espressione a destra della seconda uguaglianza va calcolata lungo le traiettorie $\mathbf{q}(t)$. La sua derivata totale è

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{m=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m + \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m - \frac{dL}{dt}. \quad (61)$$

Tenendo presente che

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_m} \dot{q}_m + \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (62)$$

si ha

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{m=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \dot{q}_m - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (63)$$

dove la seconda uguaglianza è una semplice conseguenza delle equazioni di Lagrange.

In definitiva l'energia generalizzata si conserva quando la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. Questo sicuramente si verifica in caso di vincoli fissi e in particolare in caso di assenza di vincoli, tuttavia, come vedremo risolvendo il terzo degli esercizi proposti in seguito, può capitare anche in caso di vincoli mobili.

Vediamo in dettaglio quale forma assume l'energia generalizzata per la più generica lagrangiana (46). Qualche semplice calcolo ci permette di scrivere l'energia generalizzata E a partire dalla definizione (60):

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l \dot{q}_m - \frac{1}{2} c(\mathbf{q}, t) + V(\mathbf{q}, t), \quad (64)$$

mentre l'energia meccanica è

$$T + V = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l \dot{q}_m + \sum_l b_l(\mathbf{q}, t) \dot{q}_l + \frac{1}{2} c(\mathbf{q}, t) + V(\mathbf{q}, t). \quad (65)$$

Quando i vincoli sono fissi (o in assenza di essi) si ha $c(\mathbf{q}, t) = 0$ e $b_l(\mathbf{q}, t) = 0$ per ogni l , quindi l'energia generalizzata è uguale all'energia meccanica, ossia $E = T + V$. In questo caso, inoltre, le $a_{l,m}(\mathbf{q})$ non dipendono esplicitamente dal tempo, per cui la lagrangiana che descrive il sistema è la (47) e quindi $E = T + V$ è una costante del moto. Tuttavia, anche nel caso in cui i vincoli siano mobili, può capitare che la c , le b_l e le $a_{l,m}$ non dipendano esplicitamente dal tempo. Questo implica che anche la lagrangiana (46) non dipende esplicitamente dal tempo cosicché l'energia generalizzata E si conserva, in questo caso tuttavia $E \neq T + V$. Come si è detto, vedremo un esempio di questo quando risolveremo il terzo degli esercizi proposti in seguito.

Per un sistema lagrangiano possiamo trovare altre quantità conservate (integrali del moto) come ad esempio i momenti cinetici coniugati a variabili cicliche. Consideriamo di nuovo la

lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ e supponiamo che questa non dipenda esplicitamente dalla variabile q_m (che in tal caso si chiama variabile *ciclica*). L'equazione di Lagrange per quest'ultima è allora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \text{costante} \quad (66)$$

La quantità $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$ (che si chiama momento cinetico coniugato alla variabile q_m) si conserva (è un integrale del moto). Abbiamo visto un esempio di questo per l'oscillatore armonico in coordinate cilindriche dove la variabile ciclica è θ e il momento cinetico coniugato conservato è la componente verticale della quantità di moto $J = m\rho^2\dot{\theta}$. Naturalmente per una lagrangiana ci possono essere più variabili cicliche, ognuna associata ad un momento cinetico conservato.

Riassumendo, abbiamo visto che l'energia generalizzata si conserva quando la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, mentre un momento cinetico si conserva quando la sua variabile coniugata non vi appare esplicitamente.

Esercizi

- Si consideri un punto materiale pesante vincolato ad un paraboloide di equazione $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. Si scriva la lagrangiana sia usando le variabili cartesiane x e y sia quelle polari ρ e θ . Si mostri che l'energia generalizzata è uguale a quella meccanica e che si conserva. Si mostri poi che nel primo caso (variabili cartesiane) non ci sono variabili cicliche mentre nel secondo (variabili polari) se ne ha una e quindi è possibile trovare un secondo integrale del moto oltre all'energia. Dire qual è il significato fisico del secondo integrale del moto. Scrivere le equazioni di Lagrange in entrambi i casi.
- Un pendolo sferico è un sistema composto da un punto materiale pesante di massa m vincolato alla superficie di una sfera di raggio R . Si determini la lagrangiana (si utilizzino la latitudine e la longitudine come variabili lagrangiane) e si scrivano le equazioni di Lagrange. Si mostri che l'energia generalizzata è conservata, come anche la componente verticale della quantità di moto.
- Si consideri di nuovo un pendolo semplice, ma si assuma ora che il piano verticale non sia fisso ma ruoti ad una velocità angolare costante ω intorno all'asse z . Si scriva la lagrangiana e si mostri che essa non dipende esplicitamente dal tempo nonostante che il vincolo sia mobile. Si mostri che l'energia generalizzata conservata non coincide con $T + V$. Si scriva l'equazione di Lagrange.

1.4 Separazione delle variabili e problema dei due corpi

Separazione delle variabili: equazioni e integrali primi

Ulteriori integrali primi possono emergere quando la lagrangiana è separabile. Supponiamo che abbia la struttura

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = L_a(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) + L_b(q_{m+1}, \dots, q_n, \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (67)$$

dove quindi la prima lagrangiana (L_a) dipende soltanto dalle prime m (con $1 \leq m \leq n-1$) variabili e relative derivate mentre la seconda (L_b) dipende dalle altre $n - m$. In tal caso anche le equazioni di Lagrange si separano in due gruppi di m e di $n - m$ equazioni, con ciascuno dei due gruppi che

non coinvolge variabili e relative derivate dell'altro. Si ha quindi una separazione completa dei due problemi. Si vede infatti facilmente che le equazioni sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_a}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L_a}{\partial q_l} = 0 \quad (68)$$

per $l = 1, 2, \dots, m$ e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L_b}{\partial q_l} = 0 \quad (69)$$

per $l = m + 1, m + 2, \dots, n$.

La separazione è completa, se ad esempio L_a non dipende esplicitamente dal tempo si avrà la conservazione dell'energia generalizzata $E_a = \sum_{l=1}^m \frac{\partial L_a}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - L_a$, stessa cosa per E_b se L_b non dipende esplicitamente dal tempo. Se entrambe non dipendono dal tempo si conserva l'energia generalizzata totale $E = E_a + E_b$. Un discorso del tutto analogo vale per gli altri integrali del moto che possono essere individuati separatamente per L_a e L_b .

Si tenga presente che la separabilità della lagrangiana, non significa automaticamente che L_a e L_b si riferiscono a due sistemi non interagenti tra loro, ma si verifica in molti altri casi, vediamo ora un esempio di questo.

Esempio: il problema dei due corpi

Il problema dei due corpi è un'idealizzazione in cui due punti materiali sono soggetti soltanto alle forze reciproche, mentre le forze esterne sono trascurabili. Questo per esempio è il caso del sistema Terra-Luna, quando la scala di tempo è tale da poter ignorare l'effetto dell'attrazione esercitata dal sole.

Per il terzo principio le forze sono dirette lungo la congiungente, sono di uguale intensità ed opposte in segno. Assumendo che queste siano posizionali e invarianti per rotazioni e traslazioni possiamo scrivere $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 = \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$, dove \mathbf{f}_1 è la forza che il secondo punto esercita sul primo e il contrario per \mathbf{f}_2 . L'isotropia e omogeneità dello spazio (invarianza per traslazioni e rotazioni) impongono che $\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \phi(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$. È banale verificare che $\mathbf{f}_1 = -\nabla_1 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$, $\mathbf{f}_2 = -\nabla_2 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ dove $V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -\int_a^{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \phi(r) dr$ per cui il sistema è conservativo con energia cinetica

$$T = \frac{m_1}{2} |\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 \quad \text{e potenziale} \quad V = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \quad (70)$$

Se scegliamo le 3+3 coordinate lagrangiane dei due punti materiali otteniamo la seguente espressione per la lagrangiana:

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \right). \quad (71)$$

Il tempo non compare esplicitamente per cui l'energia generalizzata E si conserva. Inoltre siamo in assenza di vincoli per cui questa coincide con l'energia meccanica $T + V$, tuttavia non ci sono variabili cicliche e non è possibile individuare "ad occhio" altri integrali primi.

Scegliamo ora come variabili lagrangiane le tre coordinate del baricentro e le tre della posizione relativa, ossia $x_g = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$, $y_g = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M}$, $z_g = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{M}$, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ e $z = z_1 - z_2$, dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale. Dopo qualche semplice conto arriviamo alla lagrangiana

$$L' = \frac{M}{2} (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right), \quad (72)$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ è la massa ridotta. La lagrangiana è quindi separabile in $L_a + L_b$, la prima relativa al centro di massa e la seconda (che è quella dei moti centrali) alla posizione relativa. Le tre variabili del centro di massa e le tre della posizione relativa soddisfano quindi equazioni di lagrange che sono totalmente indipendenti le une dalle altre. Potremo quindi studiare separatamente i due problemi le cui lagrangiane sono:

$$L_a = \frac{M}{2}(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2), \quad L_b = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right). \quad (73)$$

Non ci sono dipendenze esplicite dal tempo cosicché si conservano separatamente le energie generalizzate (coincidenti con le meccaniche)

$$E_a = \frac{M}{2}(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2), \quad E_b = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (74)$$

e naturalmente si conserva anche la loro somma, ossia l'energia generalizzata totale, cosa che avevamo già visto.

Notiamo poi che nella prima lagrangiana ci sono tre variabili cicliche, si conservano quindi i tre momenti cinetici coniugati

$$p_x = \frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}_g} = M\dot{x}_g, \quad p_y = \frac{\partial L_a}{\partial \dot{y}_g} = M\dot{y}_g, \quad p_z = \frac{\partial L_a}{\partial \dot{z}_g} = M\dot{z}_g, \quad (75)$$

che rappresentano la conservazione della quantità di moto totale del sistema.

Sembrirebbe che ci siano quattro integrali del moto associati alla prima lagrangiana, tuttavia non sono tra loro indipendenti, l'energia generalizzata E_a si può infatti scrivere $E_a = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2M}$. La conservazione dei momenti cinetici coniugati comporta il moto rettilineo uniforme del baricentro. Abbiamo quindi trovato per ora 4 integrali del moto indipendenti: E_b, p_x, p_y e p_z . Tuttavia, la lagrangiana L_b descrive un moto centrale (di entrambi i punti intorno al centro di massa, nella posizione relativa $\frac{m_2}{M}\mathbf{x}$ il primo e $-\frac{m_1}{M}\mathbf{x}$ il secondo).

È possibile trovare ulteriori integrali del moto (momento angolare) a partire dalla seconda lagrangiana, ma lasciamo questo problema come esercizio da risolvere usando il teorema di Nöther che sarà esposto più avanti.

1.5 Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange

Trasformazioni naturali $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$

Abbiamo già visto che la scelta delle variabili lagrangiane è arbitraria e che viene fatta sulla base della convenienza e delle eventuali simmetrie. Se scegliamo le variabili \mathbf{q} avremo $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{q}, t)$ e lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, se invece scegliamo le variabili \mathbf{Q} avremo $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{Q}, t)$ e lagrangiana $L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$. In generale, come abbiamo già visto, le due lagrangiane saranno diverse e a ognuna di esse corrisponderanno diverse equazioni di Lagrange.

Le relazioni $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{q}, t)$ e $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{Q}, t)$ possono essere utilizzate per ottenere $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$ (o la relazione inversa $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$), ci aspettiamo quindi che una generica trasformazione di variabili di questo tipo lasci invariata la struttura lagrangiana. In altre parole se le variabili \mathbf{q} soddisfano delle equazioni di Lagrange (con lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$), questo vale anche per le variabili \mathbf{Q} (con lagrangiana $L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t)$).

Dimostriamo direttamente questa proprietà. Per semplicità di notazione limitiamoci inizialmente al caso di sistemi a una sola variabile. Si consideri una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ e la relativa equazione

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ e sia data una generica trasformazione $Q = Q(q, t)$ la cui inversa sia $q = q(Q, t)$. Si può facilmente verificare che l'equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L'}{\partial Q} = 0 \quad (76)$$

è soddisfatta per la lagrangiana

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t), \quad (77)$$

dove $\dot{q}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}$. Si noti che la nuova lagrangiana L' non è altro che la vecchia lagrangiana L riespressa nelle nuove variabili. Si faccia attenzione, questo non significa che $L' = L$, cosa che avviene solo in casi particolari come vedremo meglio nel prossimo paragrafo quando esporremo il teorema di Nöther.

Per dimostrare questa asserzione osserviamo preliminarmente che

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q}, \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q} \right), \quad (78)$$

dove per la seconda uguaglianza nella prima equazione si è usato $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q}$ che deriva banalmente da $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}$. Si osservi inoltre che

$$\frac{\partial L'}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q} \right), \quad (79)$$

dove per la seconda uguaglianza si è usata l'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ e l'uguaglianza $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}$ che è facilmente verificabile se si tiene di nuovo presente che $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}$ e che $\frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} + \frac{\partial^2 q}{\partial Q \partial t}$. Confrontando l'equazione a destra nella (78) con la (79) si evince facilmente che la (76) è verificata. Il risultato può essere facilmente esteso al caso in cui ci siano n variabili lagrangiane.

Invarianza delle equazioni per l'aggiunta di una derivata totale

Di nuovo, per semplicità limitiamo la discussione al caso di una sola variabile lagrangiana, l'estensione al caso di più variabili è immediato.

Si consideri una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ e la relativa equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (80)$$

e si consideri la nuova lagrangiana

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) - \frac{dF(q, t)}{dt}, \quad (81)$$

dove $F = F(q, t)$ è una qualsiasi funzione di q e di t , allora l'equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \quad (82)$$

è identica alla (80). Per dimostrare questa asserzione basta far vedere che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{dF}{dt} = 0 \quad (83)$$

è identicamente verificata. Infatti se si tiene presente che $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$ è facile ricavare

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{dF}{dt}, \quad (84)$$

per cui la (83) è un'identità e la (82) è verificata per ogni $F(q, t)$. Il risultato può essere facilmente esteso al caso in cui ci siano n variabili lagrangiane.

In conclusione

Mettendo insieme i due precedenti risultati possiamo concludere che se le n componenti di \mathbf{q} soddisfano le equazioni di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0$ per $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ allora le n componenti di $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ soddisfano le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_m} - \frac{\partial L'}{\partial Q_m} = 0, \quad (85)$$

per

$$L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t) - \frac{dF(\mathbf{Q}, t)}{dt}, \quad (86)$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$ è l'inversa di $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ e dove $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Q_m} \dot{Q}_m + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$. Si tenga presente che le equazioni (85) sono soddisfatte per qualunque $F(\mathbf{Q}, t)$.

1.6 Simmetrie per un sistema lagrangiano: teorema di Nöther

Il teorema

Il teorema di Noether permette di effettuare la ricerca di integrali primi sfruttando le proprietà di simmetria della Lagrangiana. Prima di iniziare a parlarne è però utile fare un passo indietro. Abbiamo visto che più scelte sono possibili per le variabili lagrangiane, ognuna associata a una diversa lagrangiana. Avremo quindi

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)) - V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)), \quad (87)$$

con relative equazioni di Lagrange, per le variabili \mathbf{q} e

$$L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = T(\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)) - V(\mathbf{x}(\mathbf{Q}, t)), \quad (88)$$

con relative equazioni di Lagrange, per le variabili \mathbf{Q} . Abbiamo anche visto che utilizzando l'espressione delle variabili \mathbf{Q} in termini delle \mathbf{q} (ossia $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$) e le inverse (ossia $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$) si può anche passare direttamente da L a L' e viceversa tramite le

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L'(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t), \quad L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t). \quad (89)$$

dove

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Q_m} \dot{Q}_m + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad (90)$$

Detto questo, per enunciare il teorema occorre premettere un paio di definizioni. La prima è la seguente: una famiglia di trasformazioni $\mathbf{Q}_\lambda = \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})$ ad un parametro reale λ che non dipendono dal tempo si dice gruppo ad un parametro di trasformazioni se

- $\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})$ è differenziabile in $(\lambda, q_1, \dots, q_n)$;
- $\mathbf{Q}_{\lambda_2}(\mathbf{Q}_{\lambda_1}(\mathbf{q})) = \mathbf{Q}_{\lambda_2+\lambda_1}(\mathbf{q})$;
- $\mathbf{Q}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$

La seconda e la terza condizione implicano che per ogni λ esiste la trasformazione inversa \mathbf{Q}_λ^{-1} e che $\mathbf{Q}_\lambda^{-1} = \mathbf{Q}_{-\lambda}$, infatti $\mathbf{Q}_{-\lambda}(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$. Si tenga inoltre presente che in accordo con la (90) si ha $\dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{Q}_\lambda}{\partial q_m} \dot{q}_m$, inoltre, per le proprietà di differenziabilità di $\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})$ si ha

$$\dot{\mathbf{Q}}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{Q}_\lambda}{\partial q_m} \dot{q}_m = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_m} \dot{q}_m = \sum_{m=1}^n \mathbf{u}_m \dot{q}_m = \dot{\mathbf{q}}. \quad (91)$$

dove \mathbf{u}_m e il vettore con tutte le componenti nulle eccetto la m -esima che vale uno.

Ad esempio, sia $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e si consideri la famiglia di trasformazioni $\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}) = (X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda) = (x + \lambda, y + \lambda, z)$, che rappresenta la traslazione di due delle tre coordinate, è facile verificare che questa famiglia è un gruppo di trasformazioni a un parametro. Lasciamo la verifica come esercizio.

La seconda definizione da premettere è la seguente: un gruppo di trasformazioni $\mathbf{Q}_\lambda = \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})$ si dice una simmetria della lagrangiana se si ha $L_\lambda = L$ per ogni λ , dove L è la lagrangiana relativa alle variabili \mathbf{q} e L_λ quella relativa alle variabili \mathbf{Q}_λ . Tenendo presente che la prima delle (89) si riscrive per queste variabili come $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L_\lambda(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t)$, la definizione equivale a dire che

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t), \quad (92)$$

deve essere verificato per ogni λ .

Come esempio consideriamo le variabili $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e il gruppo di trasformazioni a un parametro

$$\mathbf{Q}_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda) = (x \cos \lambda - y \sin \lambda, x \sin \lambda + y \cos \lambda, z). \quad (93)$$

che è il gruppo delle rotazioni intorno all'asse z di un angolo λ . Come esercizio si verifichi che effettivamente le proprietà di gruppo a un parametro di trasformazioni siano soddisfatte.

Si consideri la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \alpha x \quad (94)$$

che rappresenta un punto materiale pesante soggetto a una forza orizzontale costante e non soggetto a vincoli. Ci aspettiamo che la (93) sia una simmetria per la lagrangiana qui sopra quando $\alpha = 0$, in tal caso infatti il sistema ha un'evidente simmetria geometrica per rotazioni intorno all'asse z , ci aspettiamo anche che non sia una simmetria della lagrangiana quando $\alpha \neq 0$, in tal caso infatti la simmetria per rotazioni è rotta.

La stessa lagrangiana scritta per le variabili 'grandi' è la seguente:

$$L(\mathbf{Q}_\lambda, \dot{\mathbf{Q}}_\lambda, t) = \frac{m}{2}(\dot{X}_\lambda^2 + \dot{Y}_\lambda^2 + \dot{Z}_\lambda^2) - mgZ_\lambda + \alpha X_\lambda \quad (95)$$

e tenendo presente che $(\dot{X}_\lambda, \dot{Y}_\lambda, \dot{Z}_\lambda) = (\dot{x} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda, \dot{x} \sin \lambda + \dot{y} \cos \lambda, \dot{z})$, possiamo facilmente verificare per sostituzione che

$$L(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \alpha(x \cos \lambda - y \sin \lambda). \quad (96)$$



Figura 3. Amalie Emmy Nöther (Erlangen, 23 marzo 1882 - Bryn Mawr, 14 aprile 1935) è stata una matematica tedesca. Si occupò di fisica matematica, teoria degli anelli e algebra astratta. Il suo nome è legato all'omonimo teorema del 1915, che mette in luce una profonda connessione tra simmetrie e leggi di conservazione.

Ora perché il gruppo a un parametro di trasformazioni (93) sia una simmetria per la lagrangiana la (94) e la (96) devono essere uguali, cosa che avviene solo se $\alpha = 0$. come ci aspettavamo. Se $\alpha \neq 0$ invece si avrà $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \neq L(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t)$ che ovviamente implica che la corretta lagrangiana L_λ per le variabili grandi non coincide con L (si veda esercizio).

Possiamo finalmente enunciare il teorema di Nöther: se un gruppo ad un parametro $\mathbf{Q}_\lambda = \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})$ è una simmetria per la lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ e $Q_{\lambda,m}(\mathbf{q})$ è la componente m -esima del vettore \mathbf{Q}_λ , allora la quantità

$$G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \left[\frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0}, \quad (97)$$

è un integrale primo.

La dimostrazione è molto semplice: la simmetria per la lagrangiana significa che l'uguaglianza $L(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ deve essere soddisfatta per ogni λ , questo implica

$$L(\mathbf{Q}_{\lambda+d\lambda}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_{\lambda+d\lambda}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) - L(\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{Q}}_\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad (98)$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda,m}} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}} \frac{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda,m}} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}} \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda,m}} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} - \sum_{m=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}} \right) \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} \right), \end{aligned} \quad (99)$$

dove per la prima uguaglianza abbiamo semplicemente eseguito lo scambio dell'ordine di integrazione $\frac{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda}$, per la seconda abbiamo usato la regola di derivazione del prodotto di due funzioni e per la terza le equazioni di Lagrange per le variabili $Q_{\lambda,m}$. Mettendo insieme la (98) e la (99) deduciamo che la quantità

$$\sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{\lambda,m}} \frac{\partial Q_{\lambda,m}}{\partial \lambda} \quad (100)$$

è conservata. Tenendo poi presente le proprietà di differenziabilità di $\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{q})$, che implicano anche la (91), ed eseguendo il limite $\lambda \rightarrow 0$, otteniamo che la quantità in (97) è una costante del moto, cosicché il teorema è dimostrato.

Per il nostro esempio, quando $\alpha = 0$ il gruppo di trasformazioni a un parametro (93) è una simmetria della lagrangiana per cui si conserva

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \left[\frac{\partial Y_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \left[\frac{\partial Z_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = m(\dot{y}x - \dot{x}y), \quad (101)$$

che, come si vede, è la componente verticale del momento angolare.

Si noti infine che le proprietà di gruppo per la famiglia di trasformazioni sono molto restrittive, in realtà, per la dimostrazione del teorema non le abbiamo utilizzate tutte, si lascia allo studente come esercizio il compito di stabilire quali di queste proprietà siano effettivamente necessarie.

Esercizi

- Si calcoli $L_\lambda(\mathbf{Q}_\lambda, \dot{\mathbf{Q}}_\lambda, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t)$ assumendo che L sia la lagrangiana (94) e il gruppo di trasformazioni a un parametro sia quello in (93). Si mostri che $L_\lambda(\mathbf{Q}_\lambda, \dot{\mathbf{Q}}_\lambda, t) = L(\mathbf{Q}_\lambda, \dot{\mathbf{Q}}_\lambda, t)$ soltanto quando $\alpha = 0$. Suggerimento: si invertano preliminarmente le trasformazioni (93). Si tenga presente che il risultato di questo esercizio è sempre quello di aver dimostrato che il gruppo di trasformazioni (93) è una simmetria della lagrangiana solo quando $\alpha = 0$.
- Si consideri di nuovo un punto materiale pesante vincolato ad un paraboloide di equazione $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. Si scriva la lagrangiana e si ricavino le equazioni di Lagrange usando le variabili cartesiane x e y . Si mostri poi che è possibile trovare il secondo integrale del moto (il primo è l'energia) usando il teorema di Nöther.
- Si consideri una catena di N punti materiali di diversa massa, che sono tutti vincolati sull'asse delle x e sono collegati tra loro da $N(N-1)/2$ molle elastiche con diverso valore della costante elastica. Si scriva la lagrangiana usando le variabili x_i , si ricavino le equazioni di Lagrange e si verifichi direttamente che la quantità di moto totale del sistema si conserva. Si usi poi il teorema di Nöther per ottenere lo stesso risultato.

- Si consideri la lagrangiana dei moti centrali $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$. Si mostri tramite il teorema di Nöther che il vettore momento angolare si conserva, a tale scopo si sfrutti la simmetria di questo sistema e si considerino le rotazioni intorno a ciascuno dei tre assi cartesiani.

2. Piccole oscillazioni dei sistemi lagrangiani

2.1 Equilibrio, stabilità, teorema di Lyapunov e teorema di Dirichlet

Equazioni di Lagrange in forma normale del primo ordine

Abbiamo già visto che nel caso di vincoli fissi la lagrangiana nella sua forma più generale assume la forma

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}) \dot{q}_l \dot{q}_m - V(\mathbf{q}), \quad (102)$$

alla quale possiamo associare (lo faremo tra poco) le equazioni di Lagrange in forma esplicita. Per semplicità limitiamoci inizialmente al caso in cui $n = 1$ per il quale la lagrangiana è

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - V(q) \quad (103)$$

e l'unica equazione di Lagrange è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = 0 &\quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} [a(q) \dot{q}] - \frac{1}{2} \frac{a(q)}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad a(q) \ddot{q} + \left[\frac{d}{dt} a(q) \right] \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{a(q)}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 &\quad \rightarrow \quad a(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial a(q)}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0, \end{aligned} \quad (104)$$

dove l'ultimo passaggio si realizza tenendo conto che $\frac{d}{dt} a(q) = \frac{\partial a(q)}{\partial q} \dot{q}$. Questa è una equazione del secondo ordine, con la derivata di ordine più alto che può essere esplicitata in modo da scrivere infine l'equazione di Lagrange nella forma

$$\ddot{q} = -a^{-1}(q) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial a(q)}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right]. \quad (105)$$

Se rinominiamo z_1 la variabile lagrangiana (ossia poniamo $z_1 = q$) e definiamo una nuova variabile z_2 come $z_2 = \dot{q}$, l'equazione del secondo ordine (105) può essere riscritta come il seguente sistema di due equazioni del primo ordine:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -a^{-1}(z_1) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial a(z_1)}{\partial z_1} z_2^2 + \frac{\partial V(z_1)}{\partial z_1} \right], \quad (106)$$

se poi utilizziamo la notazione vettoriale $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ potremo scrivere

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad (107)$$

dove

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \left(z_2, -a^{-1}(z_1) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial a(z_1)}{\partial z_1} z_2^2 + \frac{\partial V(z_1)}{\partial z_1} \right] \right). \quad (108)$$

La (107) è un'equazione differenziale in forma normale del primo ordine per la variabile \mathbf{z} dove per forma normale significa che la derivata di ordine più alto è esplicitata.

Nel caso in cui n è diverso da 1, le cose procedono in modo del tutto analogo anche se in modo piuttosto laborioso. Dalla lagrangiana (102) si ottengono le n equazioni

$$\sum_l a_{l,k}(\mathbf{q}) \ddot{q}_l + \sum_{l,m} \frac{\partial a_{l,k}(\mathbf{q})}{\partial q_m} \dot{q}_l \dot{q}_m - \frac{1}{2} \sum_{l,m} \frac{\partial a_{l,m}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_l \dot{q}_m + \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_k} = 0, \quad (109)$$

per $k = 1, \dots, n$. Procedendo in modo del tutto analogo al caso unidimensionale si arriva ad una equazione $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z})$ dove però \mathbf{z} è un vettore a $2n$ componenti, ossia $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Non scriviamo esplicitamente questa equazione perché la notazione sarebbe un po' pesante, piuttosto lasciamo quest'ultimo passo come esercizio (si tenga presente che $a_{l,k}(\mathbf{q})$ è una matrice simmetrica).

Equilibrio, stabilità e secondo teorema di Lyapunov

Iniziamo questo paragrafo con la definizione di equilibrio per il sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad (110)$$

dove $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^M$. La dimensionalità M del sistema è qui arbitraria come anche la $\mathbf{g}(\mathbf{z})$, anche se poi, quando si considerano sistemi meccanici vengono fatte scelte specifiche come si è visto nel precedente paragrafo.

Diremo che una posizione di equilibrio è una soluzione costante di questo sistema di equazioni, ossia è una posizione $\hat{\mathbf{z}}$ per la quale

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{z}}) = 0. \quad (111)$$

Per la caratterizzazione di un equilibrio sono molto importanti le sue proprietà di stabilità (o instabilità). L'intuizione ci porta a pensare che una posizione di equilibrio è stabile quando la scelta di un dato iniziale \mathbf{z}_0 in prossimità di $\hat{\mathbf{z}}$ fa sì che l'evoluzione futura del sistema, ossia la soluzione $\mathbf{z}(t)$ delle equazioni (110), non si discosti molto da $\hat{\mathbf{z}}$. Tuttavia questa idea di stabilità è piuttosto ambigua: quanto prossimo il dato iniziale e quanto vicino l'evoluto? Conviene ribaltare logicamente questa definizione intuitiva: diremo che una posizione di equilibrio è stabile se è possibile far rimanere per sempre la soluzione $\mathbf{z}(t)$ in un intorno qualsiasi prefissato di $\hat{\mathbf{z}}$ pur di scegliere il dato iniziale sufficientemente prossimo alla posizione di equilibrio.

Questa nozione va resa precisa. Definiamo preliminarmente la sfera $B_\rho(\hat{\mathbf{z}})$ in \mathbb{R}^M , centrata in $\hat{\mathbf{z}}$ e di raggio $\rho > 0$, nel modo seguente:

$$B_\rho(\hat{\mathbf{z}}) = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^M : |\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}| < \rho \}, \quad (112)$$

si noti che questa sfera è aperta cioè è priva della sua frontiera definita come

$$\delta B_\rho(\hat{\mathbf{z}}) = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^M : |\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}| = \rho \}. \quad (113)$$

Diremo allora che una posizione di equilibrio $\hat{\mathbf{z}}$ per la (110) è stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni dato iniziale \mathbf{z}_0 nella sfera $B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$ il moto $\mathbf{z}(t)$ che fa seguito resta nella sfera

$B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$. Naturalmente si deve sempre avere $\delta \leq \epsilon$ altrimenti il moto può essere già inizialmente al di fuori della sfera $B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$.

Questa definizione è stilizzata in figura 4, la sfera di raggio δ è quella più scura, quella di raggio ϵ quella più chiara (si ignori per il momento l'insieme G di colore intermedio). Il sistema che è inizialmente in \mathbf{z}_0 , all'interno della sfera $B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$, da seguito a un moto $\mathbf{z}(t)$ che resta per sempre in $B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$.

Una posizione di equilibrio si dice invece instabile, semplicemente quando non è stabile. Infine, si

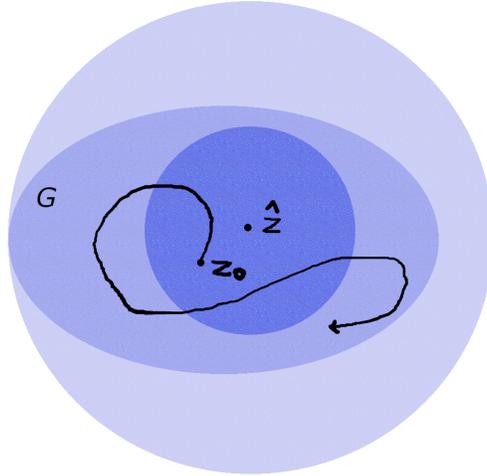


Figura 4. Questa figura illustra il teorema di Lyapunov. La sfera di colore più scuro è $B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$, l'insieme G è quello di colore intermedio e la sfera di colore più chiaro è $B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$. Un moto che fa seguito ad un dato iniziale $\mathbf{z}_0 \in B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$ non può uscire da G e quindi da $B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$.

dice asintoticamente stabile quando oltre ad essere stabile, il moto $\mathbf{z}(t)$ che fa seguito alla posizione iniziale \mathbf{z}_0 in $B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$ tende asintoticamente alla posizione di equilibrio, ossia si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}}$.

Un criterio sufficiente per la stabilità di un equilibrio ci viene fornito dal secondo teorema di Lyapunov il cui enunciato è il seguente:

Dato il sistema di equazioni differenziali (110), sia $\hat{\mathbf{z}}$ una posizione di equilibrio, questa è stabile se esiste una funzione $W(\mathbf{z})$ che è continua in una sfera $B_\rho(\hat{\mathbf{z}})$ e che è inoltre di classe \mathbb{C}^1 in tutti i punti della sfera con l'eventuale eccezione di $\hat{\mathbf{z}}$ ossia in $B_\rho(\hat{\mathbf{z}})/\hat{\mathbf{z}}$. Questa funzione deve inoltre soddisfare i seguenti due requisiti:

- $W(\mathbf{z}) > W(\hat{\mathbf{z}})$ per ogni $\mathbf{z} \in B_\rho(\hat{\mathbf{z}})/\hat{\mathbf{z}}$;
- $\dot{W}(\mathbf{z}(t)) \leq 0$ per $\mathbf{z}(t) \in B_\rho(\hat{\mathbf{z}})/\hat{\mathbf{z}}$,

dove il primo requisito significa che deve avere un minimo isolato in $\hat{\mathbf{z}}$ e dove il secondo requisito implica che W deve essere non crescente lungo le soluzioni del sistema di equazioni differenziali. La funzione W è detta di Lyapunov.

Dimostriamo ora il teorema. Scegliamo $\epsilon < \rho$ e definiamo α il minimo di W sulla superficie $\delta B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$. Questo minimo esiste perché la superficie $\delta B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$ è chiusa e limitata. Nella figura 4 questo minimo è situato sulla superficie della sfera di raggio più chiaro nel punto dove questa incontra, pur senza avere punti in comune, l'insieme di colore intermedio G . Definiamo inoltre

$$G = \{\mathbf{z} \in B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}}) : W(\mathbf{z}) < \alpha\}, \quad (114)$$

questo insieme (di colore intermedio nella figura 4) è interamente contenuto in $B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$ e non ha punti in comune con la sua frontiera $\delta B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$. In conseguenza del primo requisito si deve avere $W(\hat{\mathbf{z}}) < \alpha$ per cui la posizione di equilibrio $\hat{\mathbf{z}}$ è in G .



Figura 5. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (Jaroslavl', 6 giugno 1857 - Odessa, 3 novembre 1918) è stato un matematico e fisico russo, noto soprattutto per i suoi risultati sulla stabilità dei sistemi dinamici ma anche per i suoi molti contributi alla fisica matematica e alla teoria della probabilità.

Se il dato iniziale \mathbf{z}_0 è in G , allora il moto $\mathbf{z}(t)$ che fa seguito non può uscire da G , se così facesse questo implicherebbe che $W(\mathbf{z}(t)) \geq \alpha$ per qualche t e quindi una crescita di W rispetto al valore iniziale $W(\hat{\mathbf{z}}) < \alpha$, il che è in contrasto col secondo requisito.

Se poi si considera una sfera $B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$ (quella di colore più scuro in figura 4) interamente contenuta in G , si ha che se \mathbf{z}_0 è in $B_\delta(\hat{\mathbf{z}})$ è anche in G per cui il moto $\mathbf{z}(t)$ che fa seguito non può uscire da G e quindi non può uscire da $B_\epsilon(\hat{\mathbf{z}})$, per cui il teorema è dimostrato. Di nuovo, tutto questo è illustrato in figura 4.

Teorema di Dirichlet-Lagrange

All'inizio di questo paragrafo abbiamo visto che le equazioni di Lagrange per un sistema di vincoli fissi possono essere poste nella forma di un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine in forma normale $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z})$ dove $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, possiamo quindi applicare le definizioni e i risultati che abbiamo dato e trovato trovato poc'anzi.

Nel caso di una singola variabile lagrangiana la $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ è quella della formula (108), quindi l'equazione $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{z}}) = 0$ ci fornisce la seguente posizione di equilibrio: $z_2 = 0$ e $z_1 = \hat{z}_1$, dove \hat{z}_1 è un punto stazionario del potenziale, ossia un punto per il quale $\frac{\partial V(z_1)}{\partial z_1} = 0$. Tradotto in variabili lagrangiane questo significa velocità generalizzata \dot{q} nulla e \hat{q} determinato dall'equazione $\frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0$.

Nel caso $n > 1$ possiamo ripetere gli stessi identici passi (ma la notazione è pesante) a partire dalla (109). Il non sorprendente risultato è che per una posizione di equilibrio tutte le velocità generalizzate \dot{q}_k devono essere nulle mentre la configurazione di equilibrio $\hat{\mathbf{q}}$ è quella per cui tutte le equazioni $\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_k} = 0$ sono verificate. Molto spesso si sottintende la condizione $\dot{\mathbf{q}} = 0$ e si dice

semplicemente che la posizione di equilibrio è quella in cui tutte le derivate del potenziale si annullano.

Per quel che riguarda la stabilità possiamo enunciare il teorema di Dirichlet: se $\hat{\mathbf{q}}$ corrisponde a un minimo isolato del potenziale, allora la posizione di equilibrio $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{q}}, 0)$ è stabile.

Ne diamo una dimostrazione usando il secondo teorema di Lyapunov (che tuttavia è di molto successivo al lavoro di Dirichlet). Osserviamo infatti che l'energia generalizzata

$$E(\mathbf{z}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}) \dot{q}_l \dot{q}_m + V(\mathbf{q}), \quad (115)$$

è una funzione di Lyapunov.

È facile rendersi conto che $E(\mathbf{z})$ soddisfa il primo criterio, ossia che si ha $E(\mathbf{z}) > E(\hat{\mathbf{z}}) = V(\hat{\mathbf{q}})$ in un intorno $\mathbf{z} \in B_\rho(\hat{\mathbf{z}})/\hat{\mathbf{z}}$. Infatti, l'energia cinetica è sempre strettamente positiva eccetto quando il sistema è in quiete, ossia quando $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e inoltre, per ipotesi (minimo isolato del potenziale) esiste un intorno di $\hat{\mathbf{q}}$ dove per ogni $\mathbf{q} \neq \hat{\mathbf{q}}$ si ha $V(\mathbf{q}) > V(\hat{\mathbf{q}})$.

Ancora più facile è rendersi conto che $E(\mathbf{z})$ soddisfa anche il secondo criterio, infatti, è un integrale primo per cui lungo le traiettorie si ha $\dot{E}(\mathbf{z}(t)) = 0$.

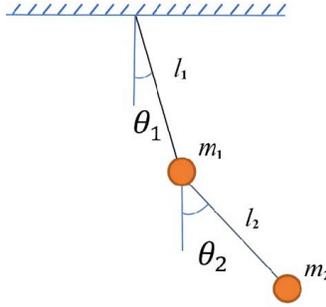
Senza dimostrazione diremo che in tutti gli altri casi, ossia quelli in cui la posizione di equilibrio è $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{q}}, 0)$, ma $\hat{\mathbf{q}}$ corrisponde a un punto di sella o a un massimo del potenziale oppure a un minimo non isolato, la posizione di equilibrio è instabile.

Possiamo comprendere in modo intuitivo quanto si afferma, basta pensare ai seguenti potenziali per un sistema unidimensionale: $V(q) = q^2$, $V(q) = q^3$ e $V(q) = -q^2$, per tutti la posizione di equilibrio è $\hat{q} = 0$ (sottintendiamo $\dot{q} = 0$), tuttavia l'equilibrio è stabile solo nel primo caso (minimo del potenziale), mentre nel secondo (punto di flesso, ossia sella in una dimensione) e nel terzo (punto di massimo) è instabile. Nel secondo e terzo caso, infatti, da quasi tutte le posizioni iniziali vicine all'equilibrio segue un moto che si allontana definitivamente da esso. Se invece consideriamo il sistema bidimensionale con potenziale $V(q_1, q_2) = q_1^2$ avremo che tutte le posizioni con $q_1 = 0$ e q_2 qualsiasi sono di equilibrio (si sottintende $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$), tuttavia non sono isolate per cui si ha instabilità. Infatti, basta che inizialmente \dot{q}_2 sia un poco diverso dallo zero perché il moto si allontani definitivamente dalla posizione iniziale e quindi da qualsiasi punto di equilibrio.

In pratica, la prima cosa da fare per stabilire su una posizione di equilibrio è stabile è costruire la matrice hessiana \hat{V} con elementi $V_{l,m} = \left[\frac{\partial^2 V(\mathbf{q})}{\partial q_l \partial q_m} \right]_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}}$. Se tutti gli autovalori sono positivi la posizione \hat{q} corrisponde a un minimo per cui l'equilibrio è stabile, se invece alcuni di essi sono negativi (punto di sella) o sono tutti negativi (punto di massimo) la posizione è di equilibrio instabile. Nel caso in cui gli autovalori siano tutti non negativi, ma uno o più di essi è nullo bisogna indagare ulteriormente. Si pensi ad esempio ai potenziali unidimensionali q^4 e $-q^4$, entrambi hanno derivata seconda nulla in $q = 0$ tuttavia per il primo si ha un minimo mentre per il secondo un massimo.

Esercizi

- Un bipendolo è un sistema composto da due punti materiali pesanti. Entrambi sono vincolati al piano verticale xz , il primo punto è collegato all'origine da un'asta di massa trascurabile e di lunghezza l_1 e il secondo è collegato al primo da una seconda asta di lunghezza l_2 . Si assuma $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$. Si determini la lagrangiana (si utilizzino le variabili lagrangiane θ_1 e θ_2 che rappresentano l'angolo tra ciascuna delle aste e l'asse verticale discendente) e si scrivano le equazioni di Lagrange. Si trovino gli integrali del moto. Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.



- Si consideri un sistema composto da due punti materiali pesanti di uguale massa m . Il primo punto sia vincolato all'asse delle x , il secondo sia vincolato alla parabola appartenente al piano verticale xz di equazione $z = -1 - x^2/2$. I due punti siano collegati da una molla di costante elastica k . Si determini la lagrangiana (si utilizzino le variabili lagrangiane x_1 e x_2) e si scrivano le equazioni di Lagrange. Si trovino gli integrali del moto. Si determinino le posizioni di equilibrio al variare dei parametri e se ne discuta la stabilità (sempre al variare dei parametri).

2.2 Lagrangiana ridotta e soluzione delle equazioni linearizzate

Lagrangiana ridotta ed equazioni linearizzate

In questo paragrafo studieremo le piccole oscillazioni di un sistema con vincoli fissi intorno a una posizione di equilibrio stabile $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{q}}, 0)$. Risolveremo il problema effettuando un'approssimazione quadratica della lagrangiana che porterà a una linearizzazione delle equazioni di Lagrange.

Sia \hat{q} una configurazione di equilibrio per la lagrangiana (102), abbiamo visto che questo equivale a dire che $V_m := \left[\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_m} \right]_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}} = 0$ per ogni m . Per poter parlare di piccole oscillazioni si deve

assumere che la matrice \hat{V} con elementi $V_{l,m} := \left[\frac{\partial^2 V(\mathbf{q})}{\partial q_l \partial q_m} \right]_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}}$ abbia tutti gli autovalori strettamente positivi. Questa è una condizione più forte dell'ipotesi di minimo del potenziale in $\hat{\mathbf{q}}$. Infatti, perché il potenziale abbia un minimo isolato in \hat{q} è necessario (ma non sufficiente) che \hat{V} non abbia autovalori negativi, ma soprattutto è sufficiente (ma non necessario) che tutti gli autovalori di \hat{V} siano strettamente positivi. Si dimostra in modo banale che tutti gli autovalori di \hat{V} sono strettamente positivi se e solo se \hat{V} è definita positiva ossia se $\sum_{l,m} V_{l,m} \eta_l \eta_m > 0$ per ogni vettore non nullo $\boldsymbol{\eta}$.

Definiamo ora \hat{T} come la matrice costante di elementi $T_{l,m} := a_{l,m}(\hat{\mathbf{q}})$. Dato che l'energia cinetica $\frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}) \dot{q}_l \dot{q}_m$ è sempre positiva per qualsiasi scelta dei vettori \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$, si ha $\sum_{l,m} T_{l,m} \dot{q}_l \dot{q}_m > 0$ per qualsiasi $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$. La matrice \hat{T} è quindi definita positiva e ha, in conseguenza, tutti gli autovalori positivi (in realtà ci possono essere casi patologici in cui uno o più autovalori sono nulli ma "suo danno, noi diremo che non parliamo di essi").

Riassumendo: per ipotesi entrambe le matrici \hat{T} e \hat{V} sono definite positive che equivale a dire che hanno solo autovalori positivi.

Sia $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$ lo scostamento dalla configurazione d'equilibrio, che ovviamente implica $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\mathbf{q}}$ e si assuma che sia $\boldsymbol{\eta}$ che $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ siano "piccoli". In tal caso per il potenziale potremo scrivere

$$V(\mathbf{q}) \simeq V(\hat{\mathbf{q}}) + \sum_{m=1}^n V_m \eta_m + \frac{1}{2} \sum_{l,m} V_{l,m} \eta_l \eta_m, \quad (116)$$

dove le somme su l e m vanno da 1 a n . Il primo termine a destra dell'uguaglianza è costante e quindi inessenziale mentre il secondo termine è nullo dato che \hat{q} è di equilibrio. Il primo termine utile è quindi quello quadratico, mentre i termini successivi sono trascurabili nell'approssimazione. Analogamente per l'energia cinetica possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}) \dot{q}_l \dot{q}_m = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\mathbf{q}) \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m \simeq \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{l,m}(\hat{\mathbf{q}}) \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m = \frac{1}{2} \sum_{l,m} T_{l,m} \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m, \quad (117)$$

dove la prima uguaglianza deriva semplicemente da $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\mathbf{q}}$, la seconda uguaglianza approssimata deriva dallo sviluppo di ordine zero delle $a_{l,m}(\hat{\mathbf{q}})$ (termini successivi sarebbero inutili vista la presenza a fattore dei termini quadratici $\dot{\eta}_l \dot{\eta}_m$ di variabili 'piccole'), infine la terza uguaglianza è vera per definizione. Possiamo quindi scrivere la lagrangiana approssimata (si dice anche lagrangiana ridotta):

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} T_{l,m} \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m - \frac{1}{2} \sum_{l,m} V_{l,m} \eta_l \eta_m = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \hat{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \hat{V} \boldsymbol{\eta}, \quad (118)$$

dove nella notazione matriciale dell'ultima espressione si intende che $\boldsymbol{\eta}$ e $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ sono vettori colonna mentre $\boldsymbol{\eta}^T$ e $\dot{\boldsymbol{\eta}}^T$ sono vettori riga.

Le equazioni di Lagrange risultanti sono

$$\sum_m T_{l,m} \ddot{\eta}_m + \sum_m V_{l,m} \eta_m = 0, \quad (119)$$

queste equazioni, che sono lineari, possono essere scritte nella forma equivalente

$$\hat{T} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \hat{V} \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (120)$$

Prima di passare alla soluzione ricordiamo che entrambe le matrici \hat{T} e \hat{V} sono simmetriche per costruzione, inoltre sono entrambe definite positive, ossia si ha che

$$\boldsymbol{\xi}^T \hat{T} \boldsymbol{\xi} > 0, \quad \boldsymbol{\xi}^T \hat{V} \boldsymbol{\xi} > 0 \quad (121)$$

per qualsiasi vettore reale non nullo $\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{\xi}^T$ è il vettore trasposto ossia il vettore "riga").

La positività e la simmetria delle due matrici implica anche che per ogni vettore complesso non nullo $\boldsymbol{\chi}$ non solo si ha che $\boldsymbol{\chi}^+ \hat{T} \boldsymbol{\chi}$ e $\boldsymbol{\chi}^+ \hat{V} \boldsymbol{\chi}$ sono entrambe reali, ma anche che

$$\boldsymbol{\chi}^+ \hat{T} \boldsymbol{\chi} > 0, \quad \boldsymbol{\chi}^+ \hat{V} \boldsymbol{\chi} > 0, \quad (122)$$

infatti scrivendo $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, dove \mathbf{a} e \mathbf{b} sono vettori reali si ha $\boldsymbol{\chi}^+ = \mathbf{a}^T - i\mathbf{b}^T$, da cui

$$\boldsymbol{\chi}^+ \hat{T} \boldsymbol{\chi} = \mathbf{a}^T \hat{T} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \hat{T} \mathbf{b} - i\mathbf{b}^T \hat{T} \mathbf{a} + i\mathbf{a}^T \hat{T} \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \hat{T} \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \hat{T} \mathbf{b} > 0, \quad (123)$$

dove la seconda uguaglianza è dovuta alla simmetria di \hat{T} e la disuguaglianza è dovuta alla positività della stessa. Per \hat{V} la dimostrazione è identica.

Soluzione delle equazioni

Se le matrici \hat{T} e \hat{V} sono entrambe diagonali le (120) diventano una collezione di equazioni di oscillatori armonici unidimensionali, si hanno infatti le n equazioni $T_{m,m} \ddot{\eta}_m + V_{m,m} \eta_m = 0$ che ha soluzione $\eta_m = c_m \cos(\omega_m t + \phi_m)$ dove $\omega_m = \sqrt{V_{m,m}/T_{m,m}}$. La soluzione generale può essere scritta in forma vettoriale come

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{m=1}^n c_m \mathbf{U}_m \cos(\omega_m t + \phi_m), \quad (124)$$

dove \mathbf{U}_m è il vettore che ha la m -esima componente uguale a uno e le restanti $n - 1$ tutte nulle. Le ω_m si chiamano pulsazioni proprie (sono le frequenze moltiplicate per 2π) e sono determinate dagli elementi delle matrici, mentre le $2n$ costanti c_m e ϕ_m sono determinate dalle $2n$ condizioni iniziali $\eta_m(0)$ e $\dot{\eta}_m(0)$. Si può verificare che la (124) è effettivamente la soluzione inserendo ciascuno degli elementi della somma nella (120) (lo si faccia come esercizio).

Cerchiamo delle soluzioni della (120) anche nel caso non diagonale, per analogia proviamo a cercarle nella forma $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \phi)$ dove \mathbf{A} è un vettore a n componenti da determinare, come anche è da determinare la velocità angolare ω . Inserendo questa espressione nella (120) si ottiene

$$\left[\omega^2 \hat{T} - \hat{V} \right] \mathbf{A} \cos(\omega t + \phi) = 0 \quad \rightarrow \quad \left[\omega^2 \hat{T} - \hat{V} \right] \mathbf{A} = 0, \quad (125)$$

dove l'uguaglianza a sinistra deve essere soddisfatta per ogni t cosa che avviene se e solo se l'uguaglianza a destra è soddisfatta. Tuttavia quest'ultima rappresenta un sistema omogeneo di equazioni del primo ordine che ha soluzioni banalmente nulle a meno che

$$\det \left[\lambda \hat{T} - \hat{V} \right] = 0, \quad (126)$$

dove abbiamo posto $\lambda = \omega^2$. Dato che $\det \left[\lambda \hat{T} - \hat{V} \right]$ è un polinomio di grado n in λ avremo n soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reali e positive (ma dovremo dimostrarlo) ma non tutte necessariamente diverse tra loro. Trovate le λ_m e quindi le pulsazioni proprie $\omega_m = \sqrt{\lambda_m}$, il secondo passo consiste nel trovare i vettori \mathbf{A}_m risolvendo le n equazioni

$$\left[\lambda_m \hat{T} - \hat{V} \right] \mathbf{A}_m = 0. \quad (127)$$

Si tenga presente che i vettori \mathbf{A}_m sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, se \mathbf{A}_m è soluzione della (127) lo è anche $\gamma_m \mathbf{A}_m$ dove γ_m è una costante qualsiasi. Detto tutto questo, la soluzione generale sarà

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{m=1}^n c_m \mathbf{A}_m \cos(\omega_m t + \phi_m). \quad (128)$$

Le $2n$ costanti c_m e ϕ_m sono determinate dalle condizioni iniziali, per cui scegliere \mathbf{A}_m o $\gamma_m \mathbf{A}_m$ non fa differenza perché il prefattore viene assorbito da c_m .

Come esercizio si mostri che nel caso in cui le matrici \hat{T} e \hat{V} sono diagonali, seguendo questa procedura, si trova ancora $\omega_m = \sqrt{V_{m,m}/T_{m,m}}$ e $\mathbf{A}_m = \mathbf{U}_m$.

Sembrerebbe tutto a posto, tuttavia ci sono un paio di buchi in tutta la costruzione, il primo è che non è detto che le soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dell'equazione polinomiale siano tutte reali e strettamente positive (perché tutto funzioni invece devono esserlo dato che le pulsazioni proprie sono date da $\omega_m = \sqrt{\lambda_m}$). Oltretutto se non sono reali, l'equazione (127) restituisce vettori \mathbf{A}_m complessi che non hanno senso fisico. Si dimostra per fortuna che tutte le λ_m sono reali e positive, dalla (127) otteniamo

$$\lambda_m \hat{T} \mathbf{A}_m = \hat{V} \mathbf{A}_m \quad \rightarrow \quad \lambda_m \mathbf{A}_m^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \mathbf{A}_m^+ \hat{V} \mathbf{A}_m, \quad (129)$$

dove però non possiamo assumere che \mathbf{A}_m sia reale (perché sia reale serve che sia reale λ_m : è un serpente che si mangia la coda!). La (122) ci assicura tuttavia che anche se \mathbf{A}_m è complesso, le quantità $\mathbf{A}_m^+ \hat{T} \mathbf{A}_m$ e $\mathbf{A}_m^+ \hat{V} \mathbf{A}_m$ sono entrambe reali e strettamente positive per cui necessariamente è reale e strettamente positiva anche λ_m . A sua volta questo ci permette di scegliere soluzioni \mathbf{A}_m reali della (127).

Il secondo buco è il seguente: non è detto che gli autovalori siano tutti distinti, ma uno o più di essi potrebbero avere una molteplicità diversa da 1, ossia si potrebbe ad esempio avere $\lambda_m = \lambda_l$ con $l \neq m$. In caso di coincidenza di uno o più autovalori l'equazione (127) è la stessa, avremo quindi un solo autovettore? Per fortuna la risposta è negativa, il numero di soluzioni indipendenti della (127) è pari alla molteplicità dell'autovalore per cui alla fine avremmo sempre un totale di n autovettori indipendenti tra loro. In realtà si può dimostrare che è sempre possibile scegliere una base di autovettori \mathbf{A}_m mutuamente ortogonali rispetto alla metrica \hat{T} , ossia per i quali vale $\mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = 0$ quando $l \neq m$. Non daremo la dimostrazione nel caso generale, tuttavia l'ortogonalità è automaticamente verificata se i relativi autovalori sono distinti, si ha infatti

$$\begin{aligned} \lambda_m \hat{T} \mathbf{A}_m = \hat{V} \mathbf{A}_m &\rightarrow \lambda_m \mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \mathbf{A}_l^+ \hat{V} \mathbf{A}_m \\ \lambda_l \hat{T} \mathbf{A}_l = \hat{V} \mathbf{A}_l &\rightarrow \lambda_l \mathbf{A}_m^+ \hat{T} \mathbf{A}_l = \mathbf{A}_m^+ \hat{V} \mathbf{A}_l \rightarrow \lambda_l \mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \mathbf{A}_l^+ \hat{V} \mathbf{A}_m \end{aligned} \quad (130)$$

dove per passare all'ultima uguaglianza abbiamo usato la simmetria di \hat{T} e \hat{V} . Confrontando le equazioni qui sopra troviamo $\lambda_m \mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \lambda_l \mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m$ e quindi, dato che per ipotesi $\lambda_l \neq \lambda_m$, avremo necessariamente $\mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = 0$. lasciamo come esercizio la dimostrazione che la ortogonalità rispetto alla metrica \hat{T} implica anche l'ortogonalità rispetto alla metrica \hat{V} .

Abbiamo anche precedentemente detto che gli autovettori \mathbf{A}_l sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, se vogliamo fare una scelta univoca possiamo ortonormalizzarli secondo la metrica \hat{T} , ossia in modo che risulti $\mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \delta_{l,m}$.

Esercizi

- Si dimostri usando il criterio generale che se le matrici \hat{T} e \hat{V} sono entrambe diagonali, la soluzione generale è la (124) dove $\mathbf{U}_m = \mathbf{A}_m$ è il vettore che ha la m -esima componente uguale a uno e le restanti $n - 1$ tutte nulle e dove $\omega_m = \sqrt{\hat{V}_{m,m}/\hat{T}_{m,m}}$. Si mostri anche che questa scelta corrisponde a $\mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \hat{T}_{m,m} \delta_{l,m}$ (non è quindi quella standard proposta poco sopra). Si dica qual è invece la scelta delle \mathbf{A}_m tale che $\mathbf{A}_l^+ \hat{T} \mathbf{A}_m = \delta_{l,m}$.
- Si consideri il bipendolo precedentemente descritto. Si trovino le matrici \hat{T} e \hat{V} e quindi la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile. Si trovino le pulsazioni proprie e i relativi autovettori e si dia la soluzione completa del problema ridotto.
- Si consideri un sistema composto da due punti materiali pesanti vincolati rispettivamente all'asse delle x e alla parabola appartenente al piano verticale xz di equazione $z = -1 - x^2/2$ (si veda l'esercizio nel precedente paragrafo). Si ponga $mg = 1$ e $k = 2$. Si trovino le matrici \hat{T} e \hat{V} e quindi la lagrangiana ridotta delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile. Si trovino le pulsazioni proprie e i relativi autovettori e si dia la soluzione completa del problema ridotto.
- Si consideri una lagrangiana ridotta per la quale \hat{T} ha componenti $\hat{T}_{2,2} = \hat{T}_{1,1} = 2$, $\hat{T}_{1,2} = \hat{T}_{2,1} = 1$, mentre \hat{V} ha componenti $\hat{V}_{2,2} = \hat{V}_{1,1} = 1$, $\hat{V}_{1,2} = \hat{V}_{2,1} = a$ con $|a| < 1$. Si trovino le pulsazioni proprie e i relativi autovettori e si dia la soluzione completa del problema ridotto al variare del parametro a (si consideri attentamente il caso $a = \frac{1}{2}$).

3. Principi variazionali

3.1 Funzionali, punti stazionari ed equazioni di Eulero-Lagrange

Il problema del bagnino (rifrazione)

Il problema del bagnino è semplice: è sulla spiaggia e si accorge di un bagnante in difficoltà, qual è il percorso da seguire per raggiungerlo nel minor tempo possibile?

Il teatro degli eventi è schematizzato nella figura qui sotto (piano xy). Il mare e la spiaggia sono separati dall'asse delle y (ossia dalla retta $x = 0$), mentre l'asse delle x non è disegnato in figura. Il bagnino si trova sulla spiaggia nella posizione (x_0, y_0) con $x_0 < 0$ mentre il bagnante è nel mare nella posizione (x_1, y_1) con $x_1 > 0$.

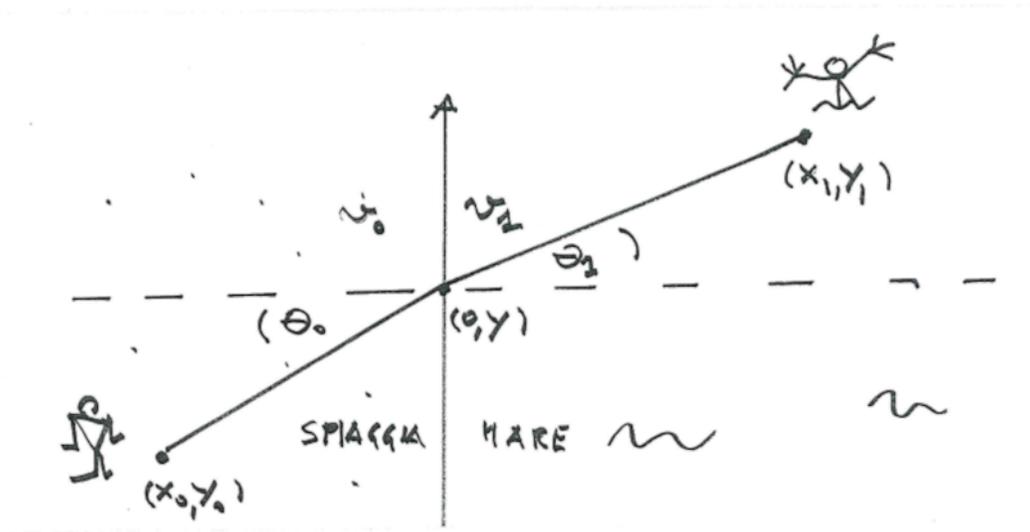


Figura 6. Per raggiungere la persona in pericolo il bagnino non segue una linea retta. Dato che corre sulla spiaggia ad una velocità maggiore di quanto non nuoti, percorre la spezzata in figura con gli angoli θ_0 e θ_1 che seguono la legge di Snell. Questa è la brachistocrona, ossia il percorso più rapido possibile.

Se il bagnino tentasse di raggiungere la persona da soccorrere procedendo in linea retta farebbe il percorso più breve (geodetica) ma non il più rapido (brachistocrona). Questo perché sicuramente correrà sulla spiaggia ad una velocità v_0 maggiore della velocità v_1 con cui nuota. Per ogni possibile traiettoria c'è un diverso tempo di percorrenza e dovrà scegliere la più rapida di tutte le alternative. Tuttavia finché è sulla spiaggia gli converrà correre in linea retta, stessa cosa in mare, sarà per lui conveniente nuotare in linea retta (tutto questo è ovvio, ma comunque lo dimostreremo più avanti in questo capitolo per le brachistocrone in un campo di velocità costante). Quindi tutto quello che gli resta da determinare è la posizione $(0, y)$ dove entrare nel mare. Fatta questa scelta il tempo di percorrenza risulterà essere

$$T = T_0 + T_1 = \frac{\sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2}}{v_0} + \frac{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y)^2}}{v_1}, \quad (131)$$

dove T_0 è il tempo della corsa mentre T_1 quello della nuotata. Per trovare il punto di ingresso in acqua basterà trovare il minimo di questa espressione rispetto a y . Uguagliando la derivata di (131)

a 0 si ottiene

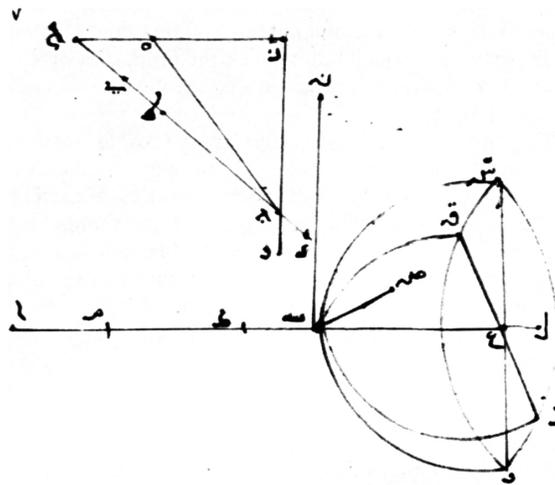
$$\frac{y - y_0}{v_0 \sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2}} - \frac{y_1 - y}{v_1 \sqrt{x_1^2 + (y_1 - y)^2}} = 0, \quad (132)$$

che permette di trovare l'ascissa y di ingresso in mare. Si noti che questa espressione ha una interessante interpretazione geometrica, può infatti essere riscritta come

$$\frac{\sin \theta_0}{v_0} = \frac{\sin \theta_1}{v_1} \rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0} = \frac{v_1}{v_0}, \quad (133)$$

dove gli angoli θ_0 e θ_1 sono quelli in figura. Questa relazione tra angoli e velocità è nota come legge di Snell.

La luce si comporta come il bagnino, se v_0 è la sua velocità nell'aria e v_1 la sua velocità nell'acqua, la relazione tra angolo di incidenza θ_0 e quello di rifrazione θ_1 è quella in (133). Ho scritto aria e acqua, ma la (133) vale per due mezzi trasparenti qualsiasi. Questa legge prende il nome da Willebrord Snell van Royen (1580 - 1626) che la determinò sperimentalmente (senza coinvolgere le velocità, nella forma $\sin \theta_1 = \alpha \sin \theta_0$), tuttavia essa è documentata per la prima volta in un manoscritto del matematico e fisico persiano Abū Sa'd al-'Alā' ibn Sahl (940 - 1000).



لانه ان ماتة عليها سطح مستوي غيره فلان هذا السطح يقطع سطح بئر
 على نقطة ب فلا بد من ان يقطع احد خطي ب ن بص فليكن ذلك
 الخط بصر والفصل المشترك بين هذا السطح وبين سطح قطع ق ر
 خط ب ن فلان هذا السطح ياتر مسيطر على نقطة ب فخط
 ب ن ياتر سطح ق ب ر على نقطة ب وكذلك خط بصر وهذا محال
 فلا ياتر مسيطر على نقطة ب سطح مستوي غيره سطح ب ن ص

Figura 7. La legge di Snell dovrebbe forse essere chiamata la legge di Ibn Sahl, infatti essa è documentata per la prima volta in un manoscritto del matematico e fisico persiano Abū Sa'd al-'Alā' ibn Sahl (940 - 1000).

Per affrontare questo tipo di problemi in ambito più generale, dove il tempo di percorrenza o la lunghezza del percorso dipendono in modo non banale dalla traiettoria, è necessario utilizzare nuovi strumenti che verranno descritti nei prossimi paragrafi.

Spazio delle traiettorie e funzionali

Fissiamo due punti \mathbf{q}_i ed \mathbf{q}_f in \mathbb{R}^n e consideriamo l'insieme di tutte le traiettorie $\mathbf{q}(t)$ con $t \in [t_i, t_f]$ e tali che $\mathbf{q}(t_i) = \mathbf{q}_i$ e $\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f$, Chiameremo questo insieme spazio delle traiettorie e lo indicheremo con \mathcal{M} . È tuttavia necessario precisare che normalmente si assume che questo contenga soltanto funzioni $\mathbf{q}(t)$ infinitamente differenziabili rispetto al parametro t .

Indichiamo con $\{\mathbf{q}\}$ una traiettoria, in tal caso un funzionale $F = F(\{\mathbf{q}\})$ è un'applicazione che associa ad ogni elemento $\{\mathbf{q}\}$ di \mathcal{M} un numero reale F , ossia

$$F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \tag{134}$$

Alcuni esempi di funzionale sono i seguenti:

$$F = \int_{t_i}^{t_f} |\mathbf{q}(t)|^2 dt, \quad F = \int_{t_i}^{t_f} |\dot{\mathbf{q}}(t)|^2 dt, \quad F = f(\mathbf{q}(t_0)), \quad F = \max_{t \in [t_i, t_f]} |\mathbf{q}(t)|^4, \tag{135}$$

dove $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}$, $t_i < t_0 < t_f$ e dove $f(\mathbf{q})$ è un'ordinaria funzione scalare di \mathbf{q} , ossia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Naturalmente, tutti i funzionali qui sopra si riferiscono a traiettorie che iniziano in \mathbf{q}_i e terminano in \mathbf{q}_f ossia tali che $\mathbf{q}(t_i) = \mathbf{q}_i$ e $\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f$.

Variazione prima di un funzionale

Consideriamo lo stesso funzionale F calcolato per due traiettorie, la prima sia $\{\mathbf{q}\}$ e la seconda sia $\{\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\}$ che differisce dalla prima per una "piccola" variazione $\{\delta\mathbf{q}\}$ (si veda il disegno in figura 8). Si tenga presente che "piccola" variazione significa che per ogni $t \in [t_i, t_f]$ non solo $\delta\mathbf{q}(t)$ ma anche tutte le sue derivate $\frac{d^n \delta\mathbf{q}(t)}{dt^n}$ devono essere piccole.

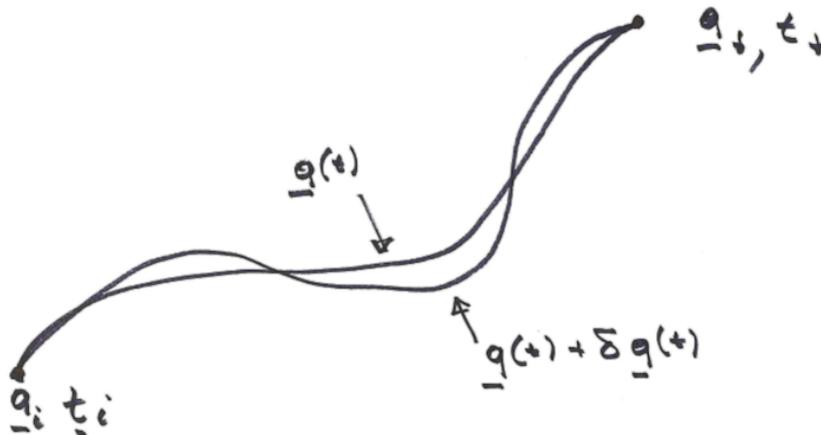


Figura 8. La traiettoria $\mathbf{q}(t)$ e la traiettoria variata $\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)$. Entrambe iniziano in \mathbf{q}_i al tempo iniziale t_i e finiscono in \mathbf{q}_f al tempo finale t_f . Non soltanto $\delta\mathbf{q}(t)$ è "piccola" ma anche tutte le sue derivate $\frac{d^n \delta\mathbf{q}(t)}{dt^n}$.

La differenza tra $F(\{\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\})$ e $F(\{\mathbf{q}\})$ può essere scritta come

$$F(\{\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\}) - F(\{\mathbf{q}\}) = \delta F(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\}) + R(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\}), \tag{136}$$

dove $\delta F(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\})$ è la variazione prima del funzionale, ossia la variazione al primo ordine in $\{\delta\mathbf{q}\}$ mentre $R(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\})$ rappresenta ciò che rimane, ossia gli ordini successivi della variazione.

Si consideri ad esempio il primo dei funzionali in (135), per questo si avrà che la differenza $F(\{\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\}) - F(\{\mathbf{q}\})$ è

$$\int_{t_i}^{t_f} |\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t)|^2 dt - \int_{t_i}^{t_f} |\mathbf{q}(t)|^2 dt = 2 \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{q}(t) \cdot \delta\mathbf{q}(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} |\delta\mathbf{q}(t)|^2 dt, \quad (137)$$

la variazione prima è quindi

$$\delta F(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\}) = 2 \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{q}(t) \cdot \delta\mathbf{q}(t) dt. \quad (138)$$

Analogamente, per il terzo dei funzionali in (135), si avrà che la differenza $F(\{\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\}) - F(\{\mathbf{q}\})$ è uguale a $f(\mathbf{q}(t_0) + \delta\mathbf{q}(t_0)) - f(\mathbf{q}(t_0))$. Ricordando che f è un'ordinaria funzione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e assumendo che sia sufficientemente regolare, la variazione prima risulta essere

$$\delta F(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\}) = \sum_l \frac{\partial f(\mathbf{q}(t_0))}{\partial q_l} \delta q_l(t_0). \quad (139)$$

Funzionale d'azione e condizione di stazionarietà

Una classe di funzionali molto generale che prendiamo ora in considerazione è la seguente:

$$A = \int_{t_i}^{t_f} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (140)$$

dove L è un'ordinaria funzione scalare di \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ e t , ossia $L : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Assumeremo che essa sia infinitamente derivabile rispetto a tutte le variabili. La funzione L si chiama lagrangiana mentre il funzionale $A = A(\{\mathbf{q}\})$ si chiama azione. La sua variazione prima è

$$\delta A = \int_{t_i}^{t_f} \left[\sum_l \frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} (\delta \dot{q}_l) \right] dt. \quad (141)$$

Un'integrazione per parti porta all'uguaglianza

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} (\delta \dot{q}_l) dt = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right|_{t_i}^{t_f}, \quad (142)$$

l'ultimo elemento a destra dell'eguaglianza è tuttavia nullo perché le variazioni δq sono nulle negli estremi di integrazione (tutte le possibili traiettorie iniziano in q_i e finiscono in q_f), pertanto possiamo riscrivere la variazione prima (141) come

$$\delta A = \int_{t_i}^{t_f} \sum_l \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right] \delta q_l dt. \quad (143)$$

Il funzionale $A(\{\mathbf{q}\})$ si dice stazionario per una traiettoria $\{\mathbf{q}\}$ se la sua variazione prima $A(\{\mathbf{q}\}, \{\delta\mathbf{q}\})$ si annulla per ogni possibile variazione $\{\delta\mathbf{q}\}$. È evidente dalla (143) che la condizione necessaria e sufficiente per la stazionarietà è che la traiettoria $\mathbf{q}(t)$ soddisfi le seguenti n equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0. \quad (144)$$



Figura 9. Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783) è stato un matematico e fisico svizzero. È considerato il più importante matematico del Settecento, e uno dei massimi della storia. È noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi e ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi.

Si può dimostrare che l'azione calcolata per la traiettoria che la rende stazionaria ha un estremo (in genere minimo). Questa proprietà può essere facilmente compresa per analogia con le funzioni ordinarie $f(\mathbf{x})$ che hanno un punto stazionario dove tutte le derivate si annullano (o equivalentemente dove la variazione prima $\nabla f \cdot \delta\mathbf{x}$ si annulla per ogni $\delta\mathbf{x}$).

Le equazioni di Eulero-Lagrange vengono quindi ricavate tramite un principio che per i motivi sopra esposti si chiama di minima azione e che rappresenta un'alternativa al metodo newtoniano per la costruzione della Meccanica Classica.

Non unicità della lagrangiana

Abbiamo visto nel capitolo I che se aggiungiamo una qualsiasi derivata totale $\frac{dF}{dt}$ dove $F = F(\mathbf{q}, t)$ è una qualsiasi funzione di \mathbf{q} e t (non si confonda la funzione F col funzionale), le equazioni di Lagrange rimangono invariate. In termini variazionali questa proprietà ha una spiegazione particolarmente semplice. Infatti se alla lagrangiana si aggiunge $\frac{dF}{dt}$ l'azione avrà un termine extra

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dF}{dt} dt = F(\mathbf{q}(t), t) \Big|_{t_i}^{t_f} = F(\mathbf{q}_f, t_f) - F(\mathbf{q}_i, t_i) \quad (145)$$

che però non dipende dalla traiettoria (tutte le traiettorie iniziano in \mathbf{q}_i e finiscono in \mathbf{q}_f) e quindi la sua variazione prima è identicamente nulla.

3.2 Metodi variazionali in ambiti diversi dalla meccanica

Geodetiche su superfici

I principi variazionali hanno innumerevoli applicazioni al di fuori della meccanica, in questo paragrafo ne utilizzeremo il formalismo per calcolare geodetiche su superfici (traiettorie più brevi).

Sia data una superficie

$$\phi(x, y, z) = 0, \quad (146)$$

ci si chiede se è possibile utilizzare le equazioni di Eulero-Lagrange per determinare su di essa la più breve traiettoria tra due punti (geodetica)? La risposta è affermativa,

La lunghezza di un elemento infinitesimo di traiettoria è dato da

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad (147)$$

dove però gli incrementi infinitesimi dx , dy e dz non sono indipendenti tra loro ma devono essere tali da lasciare il punto sulla superficie (146). Le equazioni di questa superficie possono essere parametrizzate nella forma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (148)$$

dove eventualmente una o entrambe le variabili u , v possono coincidere con una o due delle variabili x , y , z . È facile mostrare (lo si consideri un esercizio) che in tutta generalità $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = a(u, v)(du)^2 + b(u, v)dudv + c(u, v)(dv)^2$, per cui dalla (147) si ha

$$d\ell = \sqrt{a(u, v)(du)^2 + b(u, v)dudv + c(u, v)(dv)^2} = \sqrt{a(u, v)\dot{u}^2 + b(u, v)\dot{u} + c(u, v)}dv, \quad (149)$$

dove la traiettoria sulla superficie è espressa come $u = u(v)$ e per definizione $\dot{u} = \frac{du}{dv}$ (il ruolo delle due variabili può naturalmente essere scambiato). La lunghezza totale della traiettoria tra due punti sarà quindi data da

$$\ell = \int \sqrt{a(u, v)\dot{u}^2 + b(u, v)\dot{u} + c(u, v)} dv, \quad (150)$$

dove l'integrale è tra i due punti assegnati con parametri (u_0, v_0) e (u_1, v_1) . Questo ha proprio la struttura di un funzionale d'azione dove u è la variabile lagrangiana, \dot{u} la sua derivata "temporale", v è il "tempo" e dove la lagrangiana è

$$L = L(u, \dot{u}, v) = \sqrt{a(u, v)\dot{u}^2 + b(u, v)\dot{u} + c(u, v)}. \quad (151)$$

Per trovare la geodetica basterà risolvere l'equazione di lagrange associata e assegnare le condizioni iniziale e finale. Consideriamo qualche esempio per chiarire il tutto.

Il caso più semplice è quello in cui la superficie è semplicemente un piano. Senza perdere di generalità possiamo scegliere il piano $z = 0$. La curva sul piano sia individuata da $y = y(x)$ dove $y(x)$ è una qualsiasi funzione derivabile di x . Quindi i ruoli di u e v sono interpretati da y e x rispettivamente. La lunghezza di un elemento infinitesimo di traiettoria sarà:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx, \quad (152)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $dz = 0$ e abbiamo definito $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. La lunghezza totale sulla traiettoria $y = y(x)$ che congiunge i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sarà quindi il funzionale ℓ definito come

$$\ell = \int d\ell = \int \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx, \quad (153)$$

dove gli integrali sono tra due punti assegnati (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

È facile convincersi che possiamo utilizzare i metodi variazionali e trovare le equazioni di Eulero-Lagrange per determinare $y(x)$. Infatti, la variabile x gioca il ruolo di un "tempo" mentre y è la variabile lagrangiana. Si ha quindi che ℓ è l'azione da rendere stazionaria (minima) per cui $L = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ è la lagrangiana. Inoltre, dato che la variabile y è ciclica, possiamo direttamente scrivere:

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \text{costante}. \quad (154)$$

Questa equazione implica che $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ è una costante e quindi la sua soluzione è $y = ax + b$, ossia una retta come ci si aspettava. Le costanti a e b devono essere scelte in modo che la retta passi per i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Naturalmente il ruolo di x e y può essere invertito, in tal caso si trova che $\dot{x} = \frac{dx}{dy}$ è una costante e quindi la sua soluzione è $x = a'y + b'$, ossia una retta come ci si aspettava. Le costanti a' e b' devono essere scelte in modo che la retta passi per i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Come esercizio si può mostrare che il risultato finale è esattamente lo stesso.

Consideriamo ora il caso meno banale in cui la superficie è il paraboloido di rotazione $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, è conveniente in questo caso passare alle coordinate polari ρ e θ per le quali $z = \frac{\rho^2}{2}$. La curva sia individuata da $\rho = \rho(\theta)$. Avremo quindi $dz = \rho d\rho$, $dx = \cos(\theta)d\rho - \rho \sin(\theta)d\theta$ e $dy = \sin(\theta)d\rho + \rho \cos(\theta)d\theta$ e quindi

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2} d\theta, \quad (155)$$

dove abbiamo definito $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta}$. Si noti che ora è la variabile θ a giocare il ruolo di "tempo". La lagrangiana è quindi $L = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$ che non dipende esplicitamente dal "tempo" θ . Al posto delle equazioni di Eulero-Lagrange possiamo quindi usare la conservazione della "energia" e scrivere:

$$\dot{\rho} \frac{dL}{d\dot{\rho}} - L = \frac{(1 + \rho^2)\dot{\rho}^2}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2}} - \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2} = -\frac{\rho^2}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2}} = \epsilon, \quad (156)$$

dove ϵ è una costante. Questa equazione può essere semplificata, moltiplicando a sinistra e a destra per la stessa quantità $\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$ e facendo il quadrato, si ottiene

$$\rho^4 = \epsilon^2(\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\theta})^2), \quad (157)$$

che può essere risolta per integrazione (come esercizio si scriva l'integrale e si discuta il segno). La soluzione dipenderà da due costanti (di cui una è ϵ) che devono essere scelte in modo che la curva $\rho(\theta)$ (oppure $\theta(\rho)$) passi per i punti (ρ_0, θ_0) e (ρ_1, θ_1) .

Nel terzo esempio di geodetica la superficie si ottiene traslando una parabola nella direzione dell'asse delle y , l'equazione è $z = \frac{x^2}{2}$. La curva sia individuata da $y = y(x)$. Avremo quindi $dz = x dx$ per cui

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2 + x^2} dx, \quad (158)$$

dove $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. La lagrangiana $L = \sqrt{1 + \dot{y}^2 + x^2}$ dipende esplicitamente dal "tempo" x tuttavia non dipende dalla y che è quindi una variabile ciclica. L'equazione differenziale può essere trovata esplicitamente e risolta col metodo delle quadrature, questo è lasciato come esercizio.

Per questo stesso esercizio si può invertire il ruolo di x e y in tal modo che x diventi la variabile lagrangiana e y il "tempo". La curva sia individuata da $x = x(y)$, in tal caso avremo:

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + 1 + x^2\dot{x}^2} dy, \quad (159)$$

dove $\dot{x} = \frac{dx}{dy}$. Non ci sono variabili cicliche dato che $L = \sqrt{\dot{x}^2 + 1 + x^2\dot{x}^2}$ dipende sia da x che da \dot{x} , tuttavia essa non dipende dal "tempo" y per cui si può sfruttare la conservazione della "energia" e quindi affrontare anche per questa via il problema (si mostri come esercizio che l'equazione differenziale risultante è la stessa per i due schemi di soluzione).

L'inversione delle variabili può essere fatta in ogni caso, come esercizio si considerino di nuovo gli esempi precedenti cambiando variabile di integrazione. Come vedrete, in tutti i casi si passerà dalla conservazione dell'energia alla conservazione del momento coniugato alla variabile ciclica o viceversa. Le equazioni differenziali risultanti ovviamente saranno le stesse.

Brachistocrone sul piano

I principi variazionali possono essere utilizzati anche per calcolare le brachistocrone ossia le traiettorie che consentono di raggiungere una meta nel minor tempo dato un campo di velocità scalare che dipende dalla posizione. In questo paragrafo faremo qualche esempio per il caso dei moti su un piano, ma tutto può essere facilmente esteso ai moti in dimensione maggiore di due.

Sia dato un campo di velocità scalare $v(x, y) \geq 0$ che dipende dalla posizione e che determina la velocità scalare di un punto che si trova nella posizione (x, y) . Si immagini un giocatore di rugby su un campo inegualmente fangoso, in una posizione (x, y) del campo il giocatore ha la stessa velocità scalare $v(x, y)$ indipendentemente dalla direzione nella quale corre.

Il tempo infinitesimo $d\tau$ per percorrere un elemento di lunghezza $d\ell$ nella posizione (x, y) è quindi

$$d\tau = \frac{d\ell}{v(x, y)} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v(x, y)} = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v(x, y)} dx, \quad (160)$$

dove la curva sul piano è individuata da $y = y(x)$ con $y(x)$ derivabile rispetto a x e dove $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. Il tempo totale per raggiungere una meta (x_1, y_1) a partire da (x_0, y_0) sarà quindi

$$T = \int d\tau = \int \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v(x, y)} dx, \quad (161)$$

dove gli integrali sono tra i due punti assegnati (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Anche in questo caso possiamo utilizzare i metodi variazionali e trovare le equazioni di Eulero-Lagrange che determinano $y(x)$. Infatti, il tempo di percorrenza T è l'azione da rendere stazionaria (minima) e quindi $L = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v(x, y)}$ è la lagrangiana che in generale dipende dal "tempo" x dalla variabile lagrangiana y e dalla sua derivata "temporale" $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. Si noti tuttavia che avremmo potuto invertire il ruolo delle due variabili x e y dato che entrano nella definizione di $d\tau$ in modo del tutto simmetrico, in tal caso la traiettoria verrebbe individuata dalla $x(y)$. Potremo scegliere tra le due versioni secondo la convenienza.

In generale, anche se è facile scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, la loro soluzione non è banale. Il caso più semplice è quello in cui $v(x, y)$ è costante ossia è uguale in tutti i punti. In tal caso si ottiene un'equazione identica alla (154). Questo non è sorprendente dato che a velocità costante il percorso più breve (linea retta sul piano) è anche quello più rapido.

La situazione si complica un po', ma è ancora abbordabile, se assumiamo che la velocità scalare dipenda solo da una delle due variabili. Assumiamo che dipenda dalla y (se dipende dalla x basta scambiare il ruolo delle due variabili). La lagrangiana sarà quindi

$$L = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v(y)}$$

che non dipende dal "tempo" x per cui si conserva la "energia". Possiamo quindi scrivere

$$\dot{y} \frac{dL}{d\dot{y}} - L = \frac{\dot{y}^2}{v(y)\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v(y)} = \text{costante} = \epsilon. \quad (162)$$

Questa equazione si trasforma facilmente (basta moltiplicare per $\sqrt{1 + \dot{y}^2}$ e fare il quadrato) nella

$$\epsilon^2 v^2(y)(1 + \dot{y}^2) = 1, \quad (163)$$

che sua volta può essere scritta come

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2 v^2(y)}{\epsilon^2 v^2(y)}} \quad (164)$$

e finalmente integrata (si noti l'analogia con la quadratura dei moti unidimensionali),

$$x = x_0 \pm \int_{y_0}^y \sqrt{\frac{\epsilon^2 v^2(y')}{1 - \epsilon^2 v^2(y')}} dy' = x_0 + \epsilon \int_{y_0}^y \frac{v(y')}{\sqrt{1 - \epsilon^2 v^2(y')}} dy', \quad (165)$$

dove nel primo integrale il segno va scelto positivo se $y_1 - y_0$ e $x_1 - x_0$ hanno lo stesso segno e negativo nel caso contrario. Nel secondo integrale il segno viene assorbito assumendo che ϵ sia una variabile reale (quindi anche negativa). Invertendo la soluzione si trova $y(x)$. La costante ϵ va fissata in modo che $y(x_1) = y_1$.

Questa è quindi una soluzione del problema anche se non si è in grado di calcolare materialmente l'integrale.

Consideriamo ora due casi in cui la soluzione può essere trovata esplicitamente. Nel primo caso, che lasciamo come esercizio, si assume che $v(y) = y$. Dato che la velocità deve essere non negativa ci limitiamo a considerare il moto sul semipiano $y > 0$. Questo è il caso in cui la fangosità del campo, che si assume proporzionale alla velocità del giocatore di rugby, dipende solo e linearmente dalla distanza dalla linea di meta (se la direzione y è quella del lato più lungo del campo).

Il secondo caso, che chiameremo della brachistocrona classica, è un problema della fisica che ha una lunga storia. L'obiettivo consiste nel trovare la curva che congiunge due punti lungo la quale il tempo di percorrenza è minimo per un grave soggetto alla sola forza peso e vincolato alla curva stessa senza attrito. Il problema fu formulato nel 1638 da Galileo Galilei che per la mancanza di strumenti matematici adeguati propose come soluzione l'arco di circonferenza. La soluzione corretta, un arco di cicloide, fu trovata da Johann Bernoulli solo nel 1697.

Sia y la coordinata dell'asse verticale che orientiamo verso il basso e x la coordinata dell'asse orizzontale che forma con l'asse verticale un piano passante sia per il punto di partenza che quello di arrivo. Senza perdere di generalità possiamo fissare il punto di partenza nell'origine, ossia $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mentre il punto di arrivo è (x_1, y_1) con $y_1 > 0$ in modo che il punto di arrivo sia più in basso di quello di partenza (si ricordi che l'asse verticale è diretto verso il basso).



Figura 10. L'esperimento dello studente Federico Fallucca (Meccanica Classica e Analitica 2015-16) sulla brachistocrona, presentato alla Notte Europea dei Ricercatori 2016. Il modello mostra come la pallina vincolata a rotolare su una cicloide arrivi prima rispetto a quella vincolata a una retta inclinata.

Il problema è quindi il seguente: si supponga che il grave che si trova inizialmente in $(0, 0)$ con velocità nulla venga rilasciato e che scorra senza attrito lungo una curva che appartiene al piano xy e che congiunge i punti $(0, 0)$ e (x_1, y_1) . Qual è tra le curve quella che gli permette di raggiungere la meta nel minor tempo possibile?

Per avere un'idea più precisa basta guardare la figura 10. Il piano è quello del modello; il punto iniziale $(0, 0)$ è quello in alto a sinistra dove le due guide, che corrispondono a due diverse curve, la cicloide e la retta, si incontrano; il punto finale (x_1, y_1) in basso a destra è quello in cui le due curve si incontrano di nuovo. Il modello mostra sperimentalmente che la cicloide permette alla pallina di raggiungere in punto finale in un tempo minore rispetto alla retta inclinata. Noi faremo vedere che in effetti la cicloide rappresenta la brachistocrona, ossia quella che tra tutte le curve permette di raggiungere il punto finale nel minor tempo.

Osserviamo preliminarmente che l'energia del sistema (quella vera, ossia quella meccanica) è data da

$$E = \frac{m}{2}v^2 - mgy, \quad (166)$$

dove il segno negativo del potenziale deriva dal fatto che abbiamo scelto di orientare verso il basso l'asse verticale y . Dato che inizialmente il grave è in quiete ($v = 0$) nell'origine dove $y = 0$, si ha che l'energia E è nulla per cui

$$\frac{m}{2}v^2 - mgy = 0 \quad \rightarrow \quad v(y) = \sqrt{2gy}. \quad (167)$$

Il problema è quindi nella classe che abbiamo già introdotto, nel nostro caso abbiamo dalla (163)

$$y(1 + \dot{y}^2) = 2a, \quad (168)$$

dove $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ e $a = \frac{1}{4\epsilon^2 g}$ è una costante positiva da determinare in base alla posizione finale (x_1, y_1) . Questa equazione si può risolvere per integrazione con la (165) tenendo presente che il segno è positivo dato che $y_1 - y_0 = y_1$ e $x_1 - x_0 = x_1$ sono entrambi positivi. Tuttavia la soluzione della

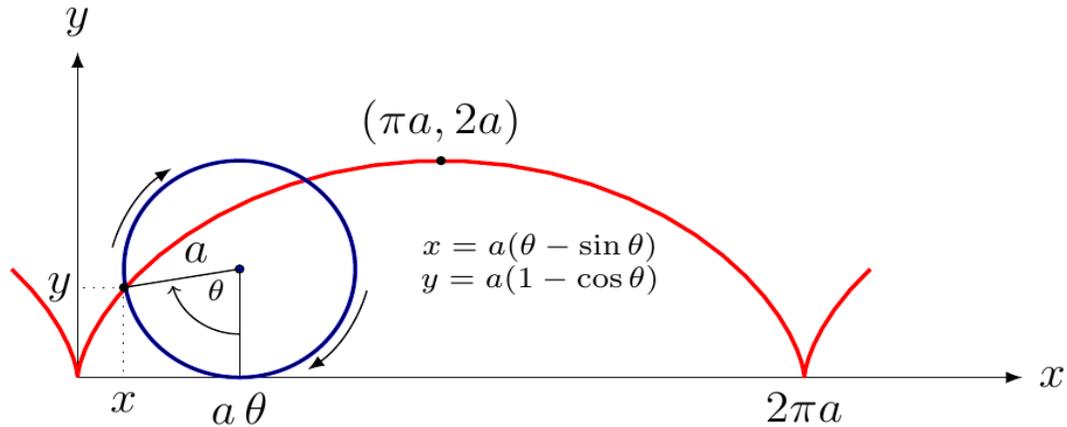


Figura 11. Rappresentazione grafica di una cicloide: una gomma masticata attaccata a una ruota di bicicletta. Fu Nicola Cusano (1401-1464) il primo a studiarne le innumerevoli proprietà ma fu Galileo Galilei (1564-1642) a darle il nome e a scrivere: *Quella curva arcuata, sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte.* Anche Pascal, Torricelli, Fermat, Cartesio, Huygens, Bernoulli e Newton si dedicarono allo studio di questa curva.

(168) è nota e la sua forma parametrica è

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin(\theta)) \\ y &= a(1 - \cos(\theta)), \end{aligned} \quad (169)$$

come può essere direttamente verificato per sostituzione diretta in (168) tenendo presente che $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$. Si noti che quando $x = 0$ si ha $y = 0$, inoltre il valore del parametro a si ottiene imponendo la condizione finale $x_1 = a(\theta_1 - \sin(\theta_1))$, $y_1 = a(1 - \cos(\theta_1))$.

Questa curva è una cicloide e la sua rappresentazione grafica è mostrata in figura 11. Si presti attenzione al fatto che nella figura l'asse delle y è orientato verso l'alto mentre nel nostro problema è orientato verso il basso. Il percorso di un grave si ottiene quindi ribaltando la figura rispetto all'asse delle x , così facendo la curva rossa coincide con la guida del modello in figura 10.

Esercizi

- Risolvere l'equazione $\rho^4 = \epsilon^2(\dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\rho})^2)$ che individua le geodetiche su un paraboloide motivando anche la scelta del segno davanti all'integrale che esprime la soluzione.
- Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange relative alla lagrangiana $L = \sqrt{1 + \dot{y}^2 + x^2}$ (dove x è il "tempo" e y la variabile lagrangiana) e si risolvano sfruttando la ciclicità di y .
- Il problema del precedente esercizio può anche essere risolto a partire dalla lagrangiana $L = \sqrt{\dot{x}^2 + 1 + x^2\dot{x}^2}$ (dove ora y è il "tempo" e x è la variabile lagrangiana). Non ci sono variabili cicliche ma si risolva tenendo presente la "energia" si conserva dato che L non dipende esplicitamente dal "tempo" y .

Esercizio svolto

- Si assuma $v(y) = y$. Si trovi la brachistocrona tra due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) con y_0 e y_1 entrambi positivi. Per risolvere basta calcolare l'integrale (165) con $v(y) = y$ scegliendo la ϵ^2 e il segno in modo che $y(x_1) = y_1$.

Dalla (165) si ha

$$x = x_0 \pm \int_{y_0}^y \sqrt{\frac{\epsilon^2 y'^2}{1 - \epsilon^2 y'^2}} dy', \quad (170)$$

che ha soluzione

$$x = x_0 \pm \frac{1}{|\epsilon|} \left[\sqrt{1 - \epsilon^2 y_0^2} - \sqrt{1 - \epsilon^2 y^2} \right], \quad (171)$$

dove il segno e $|\epsilon|$ vanno scelti in modo che

$$x_1 = x_0 \pm \frac{1}{|\epsilon|} \left[\sqrt{1 - \epsilon^2 y_0^2} - \sqrt{1 - \epsilon^2 y_1^2} \right]. \quad (172)$$

È facile verificare che la curva (171, 172) che congiunge i due punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) è un arco di circonferenza. Infatti dalla (171) si ha

$$x - x' = \mp \frac{1}{|\epsilon|} \sqrt{1 - \epsilon^2 y^2} \quad \rightarrow \quad (x - x')^2 + y^2 = \frac{1}{|\epsilon|^2}, \quad (173)$$

dove $x' = x_0 \pm \frac{1}{|\epsilon|} \sqrt{1 - \epsilon^2 y_0^2}$. Sia il raggio $\frac{1}{|\epsilon|}$ che il segno sono determinati dalla (172).



4. Sistemi hamiltoniani

4.1 Le equazioni di Hamilton

Derivazione delle equazioni di Hamilton dalle equazioni di Lagrange (e viceversa)

Il sistema di n equazioni differenziali di Lagrange descrive il moto di sistema fisico in uno spazio delle configurazioni a n dimensioni. La formulazione hamiltoniana è basata sulla costruzione di n nuove variabili \mathbf{p} dette impulsi o momenti cinetici che si aggiungono alle n variabili lagrangiane \mathbf{q} . L'insieme delle $2n$ variabili \mathbf{q}, \mathbf{p} soddisfa un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, dette di Hamilton che descrivono il moto del sistema fisico in uno spazio delle fasi a $2n$ dimensioni. Il prezzo da pagare per passare da equazioni del secondo ordine (Lagrange) ad equazioni del primo (Hamilton) è quindi il raddoppio del numero di variabili. Come vedremo, le \mathbf{q} e le \mathbf{p} entrano in modo del tutto simmetrico nella nuova formulazione.

Definiamo i momenti cinetici p_m coniugati alle variabili q_m come

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (174)$$

possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (175)$$

che può essere invertita come.

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (176)$$

Ad esempio se consideriamo un sistema unidimensionale descritto dalla più generica lagrangiana di origine meccanica

$$L = \frac{1}{2}a(q, t)\dot{q}^2 + b(q, t)\dot{q} + \frac{1}{2}c(q, t) - V(q, t), \quad (177)$$

otteniamo

$$p = a(q, t)\dot{q} + b(q, t) \quad \rightarrow \quad \dot{q} = a^{-1}(q, t)[p - b(q, t)]. \quad (178)$$

Le cose non cambiano molto per una generica lagrangiana di origine meccanica con $n > 1$, la differenza è che q e p diventano vettori a n componenti, a diventa una matrice $n \times n$ con inversa a^{-1} e b diventa un vettore a n componenti.

Definiamo quindi la hamiltoniana del sistema come

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{m=1}^n p_m \dot{q}_m(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t). \quad (179)$$

Si noti se le variabili \mathbf{q} e \mathbf{p} vengono espresse in funzione del tempo l'hamiltoniana coincide con l'energia generalizzata $E(t) = E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$ definita in (60). È molto importante tenere però presente la differenza tra hamiltoniana ed energia, non si parlerà mai di hamiltoniana se non riferendosi alla funzione delle $2n + 1$ variabili \mathbf{q}, \mathbf{p} e t mentre l'energia è una funzione, del tempo che può eventualmente essere costante.



Figura 12. Sir William Rowan Hamilton (Dublino, 4 agosto 1805 - Dublino, 2 settembre 1865) è stato un matematico, fisico, astronomo e poliglotta irlandese, noto per i suoi contributi nello sviluppo dell'ottica, della meccanica e dell'algebra. Il suo più grande contributo è forse la riformulazione della meccanica newtoniana sotto forma di meccanica hamiltoniana.

Ricaviamo ora le equazioni di Hamilton, le prime n sono:

$$\begin{aligned} \dot{p}_l &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \\ & \frac{\partial L}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) - \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \\ & \frac{\partial L}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) - \sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial H}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (180)$$

dove la prima uguaglianza deriva dalla definizione (174), la seconda dalle equazioni di Lagrange e l'ultima dalla definizione (179). Dalle definizioni (174) e (179) e dalle equazioni di Lagrange deriva inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \dot{q}_l + \sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial p_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial L}{\partial p_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) = \\ & \dot{q}_l + \sum_{m=1}^n p_m \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial p_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial p_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{q}_l, \end{aligned} \quad (181)$$

che sono le successive n equazioni. In definitiva, sono verificate per $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ le $2n$ equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_l &= \frac{\partial H}{\partial p_l} \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q_l}. \end{aligned} \quad (182)$$

Si osservi la completa simmetria tra il ruolo delle variabili q_l e quello dei momenti cinetici coniugati p_l , c'è una differenza di segno, ma basta effettuare la sostituzione $H \rightarrow -H$ per invertire il ruolo delle variabili.

Questo sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine in forma normale, detto sistema di Hamilton, descrive il moto dei sistemi meccanici soggetti a forze conservative. Tuttavia, equazioni di questo tipo sono impiegate in altri ambiti della fisica e, in generale, delle scienze.

C'è una completa equivalenza tra formalismo lagrangiano e hamiltoniano. Abbiamo appena visto che a partire da un sistema di n equazioni di Lagrange (del secondo ordine) è possibile derivare un sistema di $2n$ equazioni di Hamilton (del primo ordine). Facciamo ora vedere è vero anche il contrario, ossia che a partire da un sistema di equazioni di Hamilton è possibile derivare un sistema di equazioni di Lagrange.

Le prime n equazioni di Hamilton $\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ possono essere invertite in modo da ottenere $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Definiamo allora la lagrangiana \tilde{L} come

$$\tilde{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{m=1}^n \dot{q}_m p_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t). \quad (183)$$

Dalla definizione qui sopra ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \sum_{m=1}^n \dot{q}_m \frac{\partial p_m}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial H}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) = \\ &= \sum_{m=1}^n \dot{q}_m \frac{\partial p_m}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial H}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \sum_{m=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial p_m}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial H}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{p}_l, \end{aligned} \quad (184)$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza delle equazioni di Hamilton. Dalla definizione (183) ricaviamo in modo analogo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= p_l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{m=1}^n \dot{q}_m \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) = \\ &= p_l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{m=1}^n \dot{q}_m \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \sum_{m=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = p_l, \end{aligned} \quad (185)$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza delle equazioni di Hamilton. Infine, confrontando la (184) e la (185) si ottengono immediatamente le equazioni di Lagrange per \tilde{L}

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_l}. \quad (186)$$

Se la hamiltoniana era stata ottenuta a sua volta da una lagrangiana L si avrà ovviamente $\tilde{L} = L$. Tuttavia un sistema hamiltoniano, anche se di origine non lagrangiana, può essere sempre trasformato in un equivalente sistema lagrangiano.

Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton in assenza di vincoli

Consideriamo un sistema di N punti materiali non soggetti a vincoli. Come abbiamo già visto, se scegliamo come variabili cartesiane le $n = 3N$ variabili cartesiane che identificano la posizione del sistema nello spazio delle configurazioni otteniamo la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N). \quad (187)$$

I $3N$ momenti cinetici coniugati sono

$$p_{x,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad p_{y,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad p_{z,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i, \quad (188)$$

è facile allora verificare che la hamiltoniana del sistema assume la forma

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2 + p_{z,i}^2}{2m_i} + V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N). \quad (189)$$

Le $6N$ equazioni di Hamilton associate possono essere scritte a gruppi di 6 (un gruppo per ogni punto) nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\nabla_i V, \quad (190)$$

dove $\mathbf{p}_i = (p_{x,i}, p_{y,i}, p_{z,i})$ e dove ∇_i è il gradiente relativo all' i -esimo punto materiale. Queste non sono altro che le equazioni di Newton scritte in forma normale del primo ordine.

Sarebbe tuttavia un errore pensare che in assenza di vincoli le equazioni di Hamilton si riducano alle equazioni di Newton, come nel caso lagrangiano, questo succede solo quando in assenza di vincoli vengono scelte come variabili hamiltoniane le $n = 3N$ coordinate cartesiane di ciascun punto e gli $n = 3N$ momenti cinetici coniugati.

Facciamo ora l'esempio di un punto materiale soggetto a una forza centrale. Questo sistema non è soggetto a vincoli, tuttavia il moto si svolge sul piano (detto di Laplace) perpendicolare al momento angolare costante (assumendo che quest'ultimo non sia nullo). Senza perdere di generalità orientiamo il momento angolare nella direzione dell'asse z , in tal caso il piano di Laplace è il piano xy . La hamiltoniana in coordinate cartesiane è $\frac{m}{2}[p_x^2 + p_y^2] + V(\sqrt{x^2 + y^2})$ e le relative equazioni di Hamilton coincidono con quelle di Newton. Se usiamo invece le coordinate polari la lagrangiana (sul piano di Laplace) è

$$L = \frac{m}{2}[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2] - V(\rho), \quad (191)$$

i momenti cinetici coniugati sono quindi

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2 \dot{\theta}. \quad (192)$$

Queste relazioni possono essere invertite come

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\rho^2}, \quad (193)$$

e la hamiltoniana può essere finalmente scritta come

$$H(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \dot{\rho}p_\rho + \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} + V(\rho). \quad (194)$$

Si noti che allo stesso risultato si sarebbe potuto giungere scrivendo l'energia meccanica in termini delle quattro variabili hamiltoniane.

Le prime due equazioni di Hamilton sono quindi

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\rho^2}, \quad (195)$$

che in realtà avevamo già scritto in (193), le altre due sono

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} + \frac{p_\theta^2}{m\rho^3}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (196)$$

L'ultima delle due implica che p_θ si conserva come conseguenza della ciclicità della variabile θ (parleremo in generale di ciclicità in ambito hamiltoniano poco più avanti). La variabile p_θ non è altro che la componente verticale del momento angolare e la sua conservazione implica la seconda legge di Keplero. Sia infatti \dot{A} la velocità areolare, si verifica facilmente che $\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{1}{2m}p_\theta$.

Esempi di hamiltoniane ed equazioni di Hamilton per sistemi vincolati si trovano negli esercizi in fondo al paragrafo.



Figura 13. Giovanni Keplero, adattamento di Johannes Kepler (Weil der Stadt, 27 dicembre 1571 – Ratisbona, 15 novembre 1630), è stato un astronomo, astrologo, matematico, cosmologo, teorico musicale, filosofo della natura e teologo luterano tedesco, che scoprì empiricamente le omonime leggi che regolano il movimento dei pianeti.

Conservazione dell'energia e delle variabili coniugate a variabili cicliche

La derivata totale della hamiltoniana $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$ calcolata lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton è

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_m \frac{\partial H}{\partial q_m} \dot{q}_m + \sum_m \frac{\partial H}{\partial p_m} \dot{p}_m = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_m \frac{\partial H}{\partial q_m} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \sum_m \frac{\partial H}{\partial p_m} \frac{\partial H}{\partial q_m} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (197)$$

pertanto essa è un'energia generalizzata che si conserva quando non dipende esplicitamente dal tempo. Del resto è facile verificare che $\frac{\partial H}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ (lo si consideri un esercizio) per cui questa condizione di conservazione per l'energia generalizzata coincide con quella che abbiamo già stabilito in ambito lagrangiano.

Se la hamiltoniana non dipende esplicitamente da una delle variabili (che si dice quindi ciclica), la variabile ad essa coniugata si conserva. Se q_l è la variabile ciclica, si ha infatti

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} = 0. \quad (198)$$

Si tenga presente, che la distinzione di ruolo tra variabili 'posizionali' \mathbf{q} e momenti cinetici \mathbf{p} si assottiglierà o addirittura sparirà quando introdurremo le trasformazioni canoniche per cui è possibile che anche una variabile p_l sia ciclica. In tal caso sarà la sua variabile coniugata q_l a conservarsi

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} = 0. \quad (199)$$

Esempi di variabili cicliche si trovano negli esercizi che seguono. Come si vedrà l'esistenza di queste può dipendere dalla nostra scelta delle variabili lagrangiane.

Esercizi svolti

- Si scrivano la hamiltoniana e le equazioni di Hamilton per un sistema che ha Lagrangiana $L = T - V$ con $L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2$ e $V = V(q_2)$ (si noti che il potenziale dipende solo da q_2). Si trovino gli integrali del moto.

Per calcolare la hamiltoniana è preliminarmente necessario determinare i momenti cinetici coniugati, che risultano essere

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2, \quad (200)$$

e poi invertire in modo da esplicitare le derivate delle variabili lagrangiane in funzione delle variabili hamiltoniane

$$\dot{q}_1 = \frac{2p_1 - p_2}{3}, \quad \dot{q}_2 = \frac{2p_2 - p_1}{3}. \quad (201)$$

Dato che l'energia cinetica è quadratica nelle variabili puntate, i vincoli sono fissi e quindi la hamiltoniana può essere scritta come $H = T + V$, dove ovviamente T e V vanno espressi in funzione delle variabili hamiltoniane, per cui

$$H = \frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2) + V(q_2). \quad (202)$$

Le prime due equazioni di Hamilton sono le (201) e le altre due sono

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2}. \quad (203)$$

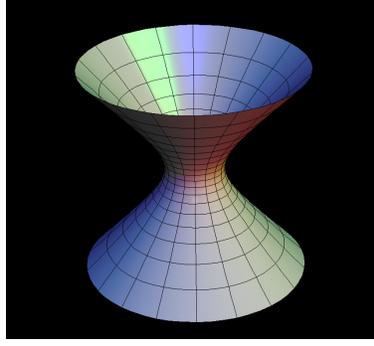
Dalla prima equazione qui sopra deduciamo che p_1 è una costante del moto. Dato che i vincoli sono fissi, l'altra costante del moto è l'energia $E = H(q_2, p_1, p_2)$.

- Si consideri un punto materiale pesante di massa m vincolato all'iperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ (è una superficie simile a una clessidra). Il punto sia collegato da una molla di costante k all'origine.

Si scriva la lagrangiana usando come variabili lagrangiane la quota z e l'angolo θ delle variabili polari. Si scriva la hamiltoniana. Si mostri che c'è una variabile ciclica e quindi è possibile trovare un secondo integrale del moto oltre all'energia e dire qual è il suo significato fisico.

Dalla equazione dell'iperboloide è facile dedurre $\rho^2 = z^2 + 1 \rightarrow \rho = \sqrt{z^2 + 1}$, per cui le variabili cartesiane x e y in funzione di quelle lagrangiane e le relative derivate temporali risultano essere

$$x = \sqrt{z^2 + 1} \cos \theta, \quad \dot{x} = -\dot{\theta} \sqrt{z^2 + 1} \sin \theta + \frac{z \dot{z}}{\sqrt{z^2 + 1}} \cos \theta,$$



$$y = \sqrt{z^2 + 1} \sin \theta, \quad \dot{y} = +\dot{\theta} \sqrt{z^2 + 1} \cos \theta + \frac{z\dot{z}}{\sqrt{z^2 + 1}} \sin \theta, \quad (204)$$

e ovviamente $z = z$ e $\dot{z} = \dot{z}$. L'energia cinetica è quindi

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] = \frac{m}{2} \left[(z^2 + 1) \dot{\theta}^2 + \frac{2z^2 + 1}{z^2 + 1} \dot{z}^2 \right], \quad (205)$$

mentre il potenziale è

$$V = mgz + \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = mgz + kz^2, \quad (206)$$

dove la seconda uguaglianza è verificata a meno del termine costante irrilevante $\frac{k}{2}$. Per la lagrangiana basta scrivere

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left[(z^2 + 1) \dot{\theta}^2 + \frac{2z^2 + 1}{z^2 + 1} \dot{z}^2 \right] - mgz - kz^2 \quad (207)$$

Per calcolare la hamiltoniana è preliminarmente necessario determinare i momenti cinetici coniugati, che risultano essere

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(z^2 + 1) \dot{\theta}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \frac{2z^2 + 1}{z^2 + 1} \dot{z}, \quad (208)$$

e poi invertire in modo da esplicitare le derivate delle variabili lagrangiane in funzione delle variabili hamiltoniane

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(z^2 + 1)} \quad \dot{z} = \frac{p_z(z^2 + 1)}{m(2z^2 + 1)}. \quad (209)$$

Dato che i vincoli sono fissi, la hamiltoniana può essere scritta come $H = T + V$, dove ovviamente T e V vanno espressi in funzione delle variabili hamiltoniane, per cui

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m(z^2 + 1)} + \frac{p_z^2(z^2 + 1)}{2m(2z^2 + 1)} + mgz + kz^2. \quad (210)$$

Le prime due equazioni di Hamilton sono le (209) e le altre due sono

$$\dot{p}_\theta = 0, \quad \dot{p}_z = \frac{z p_\theta^2}{m(z^2 + 1)^2} + \frac{z p_z^2}{m(2z^2 + 1)^2} - mg - 2kz. \quad (211)$$

Dalla prima equazione qui sopra deduciamo che p_θ è una costante del moto (la componente lungo z del momento angolare). Dato che la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, l'altra costante del moto è l'energia $E = H(z, p_\theta, p_z)$.

4.2 Le parentesi di Poisson

Definizione, parentesi fondamentali e proprietà

Date due funzioni scalari derivabili $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, si definisce la parentesi di Poisson $\{f, g\}$ come

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (212)$$

Si verifica facilmente che

$$\{q_l, p_m\} = \delta_{l,m}, \quad \{q_l, q_m\} = \{p_l, p_m\} = 0, \quad (213)$$

dove $\delta_{l,m}$ è la delta di Kronecker. Queste si chiamano parentesi di Poisson fondamentali. Per la dimostrazione basta usare la definizione (212) e tenere conto che per ogni l sia ha $\frac{\partial q_l}{\partial q_i} = \delta_{l,i}$, $\frac{\partial p_l}{\partial p_i} = \delta_{l,i}$, $\frac{\partial q_l}{\partial p_i} = 0$ e $\frac{\partial p_l}{\partial q_i} = 0$, quindi ad esempio

$$\{q_l, p_m\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_l}{\partial q_i} \frac{\partial p_m}{\partial p_i} - \frac{\partial p_m}{\partial q_i} \frac{\partial q_l}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \delta_{l,i} \delta_{m,i} = \delta_{l,m}. \quad (214)$$

Le (212) hanno come controparte in Meccanica Quantistica il commutatore di due operatori hermitiani e le (213) i commutatori fondamentali tra operatori posizione e impulso.



Figura 14. Siméon-Denis Poisson (Pithiviers, 21 giugno 1781 – Parigi, 25 aprile 1840) è stato un matematico, fisico, astronomo e statistico francese. Tra i suoi contributi vi sono importanti risultati di meccanica analitica (*Traité de mécanique*, 2 volumi, 1811 e 1833).

Usando la definizione (212) è immediato verificare (lo si consideri un esercizio) le seguenti tre proprietà per le funzioni derivabili f , g e h :

- Antisimmetria:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad (215)$$

che implica in modo ovvio $\{f, f\} = 0$.

- Bilinearità:

$$\{\alpha f + \beta g, \gamma h\} = \alpha\gamma\{f, h\} + \beta\gamma\{g, h\}, \quad (216)$$

dove α , β e γ sono costanti.

- Composizione:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g, \quad (217)$$

che implica in modo ovvio $\{f, gf\} = \{f, g\}f$.

Se le funzioni sono di classe C^2 vale inoltre la seguente

- Regola di Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial x}\right\} \quad (218)$$

dove il simbolo x denota una qualsiasi tra le variabili scalari q_i , p_i e t da cui dipendono le funzioni f e g . Possiamo verificare direttamente questa relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial x} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial x} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial x} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial x}\right\}. \end{aligned} \quad (219)$$

L'ultima proprietà che vogliamo elencare è l'identità di Jacobi che richiede anch'essa che le funzioni siano di classe C^2 :

- Identità di Jacobi:

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0, \quad (220)$$

la cui dimostrazione è semplicissima ma terribilmente lunga e noiosa. Lo studente che vuole cimentarsi non deve fare altro che scrivere tutti i termini e verificare che ci sono cancellazioni a due a due.

Integrali primi e parentesi di Poisson

Consideriamo una funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ calcolata lungo una traiettoria che è soluzione delle equazioni di Hamilton. La sua derivata totale rispetto al tempo è

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad (221)$$

dove la seconda uguaglianza è una conseguenza delle equazioni di Hamilton.

In conseguenza, f è un integrale primo del sistema se e solo se $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$. Se f non dipende esplicitamente dal tempo esso è un integrale primo se e solo se $\{f, H\} = 0$.



Figura 15. Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia, 1^o luglio 1646 – Hannover, 14 novembre 1716) è stato un filosofo, matematico, scienziato, logico, teologo, linguista, glottoteta, diplomatico, giurista, storico e magistrato tedesco. È Tra i massimi esponenti del pensiero occidentale, nonché una delle poche figure di "genio universale". A lui ed a Isaac Newton vengono si devono l'introduzione e i primi sviluppi del calcolo infinitesimale.

Si noti che da questa proposizione segue immediatamente che H è un integrale primo se e solo se non dipende esplicitamente dal tempo, infatti dato che $\{H, H\} = 0$ si ha

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (222)$$

Questa caratterizzazione degli integrali primi non è un metodo per trovarne, non fornisce nessuna indicazione in questo senso, però dà un criterio semplice per verificare se una funzione è una costante del moto.

Scriviamo adesso la derivata totale rispetto al tempo di una parentesi di Poisson $\{f, g\}$ con f e g che per ipotesi non dipendono esplicitamente dal tempo e sono costanti del moto. Dato che anche $\{f, g\}$ non dipende esplicitamente dal tempo, avremo come diretta conseguenza di (221)

$$\frac{d\{f, g\}}{dt} = \{\{f, g\}, H\}. \quad (223)$$

D'altra parte dall'identità di Jacobi (221) otteniamo

$$\{\{f, g\}, H\} = \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\}, \quad (224)$$

dove abbiamo usato la proprietà di antisimmetria $\{H, \{f, g\}\} = -\{\{f, g\}, H\}$ delle parentesi di Poisson. Sostituendo la (224) nella (223) otteniamo

$$\frac{d\{f, g\}}{dt} = \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} = 0, \quad (225)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dall'ipotesi che f e g sono costanti del moto e non dipendono esplicitamente dal tempo, per cui le parentesi $\{H, f\}$ e $\{H, g\}$ sono nulle.

Abbiamo quindi dimostrato il teorema di Jacobi-Poisson per il quale se f e g sono due integrali primi indipendenti dal tempo, allora anche $\{f, g\}$ è un integrale primo indipendente dal tempo.

Il teorema di Jacobi-Poisson può essere usato per trovare nuovi integrali primi a partire da integrali primi già noti, tuttavia non è assolutamente detto che $\{f, g\}$ sia una nuova costante del moto, può capitare infatti che esso sia funzionalmente dipendente da f e g , oppure sia un numero reale eventualmente nullo. In entrambi i casi $\{f, g\}$ non aggiunge nulla di nuovo. Sicuramente il teorema non è di alcuna utilità se $n = 1$ o $n = 2$, nel primo caso non ci sono due integrali primi f e g funzionalmente indipendenti l'uno dall'altro, nel secondo caso sì, ma non ce ne è un terzo, per cui necessariamente $\{f, g\}$ non è una nuova costante del moto.

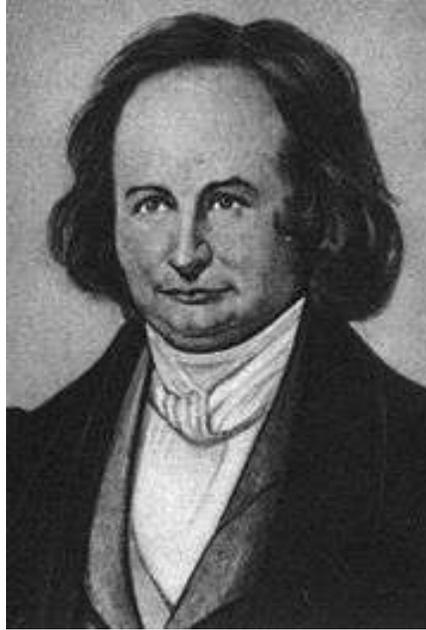


Figura 16. Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam, 10 dicembre 1804 – Berlino, 18 febbraio 1851) è stato un matematico tedesco che ha dato contributi fondamentali alle teoria delle funzioni ellittiche, alla teoria delle equazioni differenziali e alla teoria dei numeri. Jacobi è stato il primo matematico ebreo ad essere nominato professore in un'università tedesca.

4.3 Separabilità e integrali primi

Integrali primi e separazione delle variabili

Supponiamo di avere una hamiltoniana della forma

$$H(q_1, p_1, \dots, q_l, p_l, g(q_{l+1}, p_{l+1}, \dots, q_n, p_n), t), \quad (226)$$

dove alcune coppie di variabili coniugate (le coppie dalla $l + 1$ alla n nella hamiltoniana qui sopra) compaiono solo attraverso una funzione g che dipende solo da esse. L'energia generalizzata si conserva solo se non c'è esplicita dipendenza dal tempo della hamiltoniana, tuttavia possiamo dimostrare che si conserva sempre g (che non dipende esplicitamente dal tempo):

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{m=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial q_m} \dot{q}_m + \sum_{m=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial p_m} \dot{p}_m = \sum_{m=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial q_m} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \sum_{m=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial p_m} \frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad (227)$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo usato le equazioni di Hamilton. Data la struttura della hamiltoniana e dato che $l + 1 \leq m \leq n$ abbiamo che $\frac{\partial H}{\partial q_m} = \frac{\partial H}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial q_m}$ e $\frac{\partial H}{\partial p_m} = \frac{\partial H}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial p_m}$, possiamo quindi

scrivere

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{m=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial q_m} \frac{\partial H}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial p_m} - \sum_{m=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial p_m} \frac{\partial H}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial q_m} = 0, \quad (228)$$

il che significa che g è un integrale primo. Possiamo chiamare α il suo valore costante.

Questo permette una parziale separazione delle equazioni del moto perché per le coppie di variabili con $1 \leq m \leq l$ possiamo scrivere

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}(q_1, p_1, \dots, q_l, p_l, \alpha, t), \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}(q_1, p_1, \dots, q_l, p_l, \alpha, t) \quad (229)$$

e quindi le coppie di variabili con $l+1 \leq m \leq n$ partecipano soltanto attraverso la costante α che è il valore dell'integrale del moto $g(q_{l+1}, p_{l+1}, \dots, q_n, p_n)$ il cui valore dipende dai dati iniziali delle variabili con indice da $l+1$ a n . Al contrario, le equazioni del moto per le coppie di variabili con $l+1 \leq m \leq n$ dipendono esplicitamente dalle variabili con $1 \leq m \leq l$.

Nel caso in cui la hamiltoniana ha la struttura

$$H(g_a(q_1, p_1, \dots, q_l, p_l), g_b(q_{l+1}, p_{l+1}, \dots, q_n, p_n), t) \quad (230)$$

si conservano sia g_a che g_b (siano rispettivamente α_a e α_b i loro valori costanti), inoltre le equazioni del moto si separano in due gruppi indipendenti salvo per la presenza eventuale della costante del moto del primo gruppo nelle equazioni del secondo e viceversa. Ad esempio, se q_m e p_m appartengono al primo gruppo, avremo le equazioni

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} = \frac{\partial H}{\partial g_a} \frac{\partial g_a}{\partial p_m} \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m} = -\frac{\partial H}{\partial g_a} \frac{\partial g_a}{\partial q_m} \quad (231)$$

Sia $\frac{\partial g_a}{\partial p_m}$ che $\frac{\partial g_a}{\partial q_m}$ dipendono solo dalle variabili del primo gruppo mentre $\frac{\partial H}{\partial g_a}$ sarà una funzione di g_a , g_b ed eventualmente del tempo. Sostituendo a g_b le rispettive costanti del moto α_a e α_b si ha che $\frac{\partial H}{\partial g_a}$ dipende solo da queste e dal tempo. Quindi le equazioni del primo gruppo non contengono le variabili del secondo se non attraverso la costante α_b e viceversa. Come questo può essere utile sarà chiaro quando svolgeremo il primo degli esercizi che concludono questo paragrafo.

Un caso particolare è quello in cui

$$H = g_a(q_1, p_1, \dots, q_l, p_l) + g_b(q_{l+1}, p_{l+1}, \dots, q_n, p_n) \quad (232)$$

per il quale c'è una totale separazione tra i due sistemi di equazioni che non comunicano in alcun modo, neanche attraverso costanti del moto. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \dot{q}_m &= \frac{\partial g_a}{\partial p_m}, & \dot{p}_m &= -\frac{\partial g_a}{\partial q_m}, & \text{per } 1 \leq m \leq l, \\ \dot{q}_m &= \frac{\partial g_b}{\partial p_m}, & \dot{p}_m &= -\frac{\partial g_b}{\partial q_m}, & \text{per } l+1 \leq m \leq n. \end{aligned} \quad (233)$$

Quindi ognuno dei due sottosistemi ha la sua hamiltoniana. Questo caso particolare della separabilità hamiltoniana corrisponde alla separabilità lagrangiana ($L = L_a + L_b$) discussa nel secondo capitolo.

Completa separabilità

Consideriamo adesso un sistema che ammette un numero n di integrali del moto pari al numero delle coppie di variabili. Possiamo chiamare α_m il valore costante di questi integrali (collettivamente

α). Se tramite gli integrali del moto è possibile esprimere ciascun momento cinetico in termini della sua variabile coniugata e della collezione di costanti α diremo che c'è completa separabilità. In simboli: c'è completa separabilità se per ogni m

$$p_m = p_m(q_m, \alpha). \quad (234)$$

Se ad esempio la hamiltoniana ha la forma 'decomponibile'

$$H(g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2), \dots, g_n(q_n, p_n), t), \quad (235)$$

per quello che abbiamo detto nel precedente paragrafo, avremo $g_m(q_m, p_m) = \alpha_m$ per ogni m , dal quale per inversione possiamo esplicitare $p_m = p_m(q_m, \alpha_m)$, che è un caso particolare della (234). Quindi il sistema risulta essere completamente separabile. Inoltre le equazioni di Hamilton si separano per ogni coppia di variabili, eccetto per il fatto che possono dipendere da qualsiasi degli integrali del moto.

Se invece la hamiltoniana ha una forma totalmente 'incapsulata' (come una matryoska)

$$H(g_1(q_1, p_1, g_2(q_2, p_2, g_3(\dots g_n(q_n, p_n))\dots)), t), \quad (236)$$

per quello che abbiamo detto nel precedente paragrafo, avremo $g_n(q_n, p_n) = \alpha_n$ e inoltre avremo $g_m(q_m, p_m, \alpha_{m+1}) = \alpha_m$ per $1 \leq m \leq n-1$. Possiamo quindi esplicitare $p_n = p_n(q_n, \alpha_n)$ e $p_m = p_m(q_m, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ per $1 \leq m \leq n-1$, che è anch'esso un caso particolare della (234). Quindi anche questo sistema risulta essere completamente separabile. Tuttavia in questo caso, le equazioni di Hamilton non sono separate per ogni coppia di variabili.

Ci sono inoltre una infinità di casi diversi o semplicemente intermedi, si consideri ad esempio la hamiltoniana

$$H(g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2, g_3(q_3, p_3)), t) \quad (237)$$

per la quale è facile verificare che $p_1 = p_1(q_1, \alpha_1)$, $p_2 = p_2(q_2, \alpha_2, \alpha_3)$, $p_3 = p_3(q_3, \alpha_3)$ e quindi anche in questo caso c'è completa separabilità delle variabili. Anche in questo caso le equazioni di Hamilton non sono separate per ogni coppia di variabili.

Se la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, per tutti i sistemi considerati in questo paragrafo si conserva anche l'energia che non è una quantità indipendente, ma come si vede facilmente è una funzione degli integrali del moto, ossia $E = H(\alpha)$.

Nei casi che abbiamo considerato, soltanto quello con hamiltoniana decomponibile porta ad equazioni tutte separate per coppia (anche se tutte le altre variabili possono apparire nelle singole equazioni tramite le α_m). È normale allora chiedersi per quale motivo si parla di completa separabilità anche in quei casi in cui le equazioni di Hamilton non si separano completamente. Il motivo è che quando un sistema è completamente separabile, nel senso della definizione data in questo paragrafo, è possibile costruire nuove variabili tramite una trasformazione canonica le cui equazioni sono effettivamente tutte separate per coppia. Nell'ultimo capitolo vedremo che la completa separabilità ha un ruolo cruciale per la definizione delle variabili azione-angolo per sistemi con più di un grado di libertà e che queste variabili, quando esistono, hanno sempre equazioni tutte separate.

Esercizi svolti

- Si consideri un sistema con hamiltoniana

$$H = \left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{q_1^2}{2} + 1 \right) \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + 1 \right). \quad (238)$$

Si dica quali sono le costanti del moto. Si scrivano i momenti cinetici in funzione di esse e delle rispettive variabili coniugate (completa separabilità). Si scrivano e si risolvano le equazioni di Hamilton.

Questa hamiltoniana ha la struttura decomponibile

$$H = H(g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2)) = g_1(q_1, p_1) \cdot g_2(q_2, p_2), \quad (239)$$

per cui c'è completa separabilità e inoltre le equazioni per le variabili q_1, p_1 possono essere risolte separatamente da quelle per le variabili q_2, p_2 e viceversa.

Gli integrali primi sono

$$\alpha_1 = \frac{p_1^2}{2} + \frac{q_1^2}{2} + 1, \quad \alpha_2 = \frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + 1, \quad (240)$$

si conserva inoltre $E = E(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 \alpha_2$ che ovviamente non è un nuovo integrale del moto. I momenti cinetici sono

$$p_1 = \pm \sqrt{2\alpha_1 - 2 - q_1^2}, \quad p_2 = \pm \sqrt{2\alpha_2 - 2 - q_2^2}, \quad (241)$$

c'è quindi completa separabilità.

Per questo sistema le equazioni si disaccoppiano le une dalle altre, mostriamolo esplicitamente e tentiamo di risolverle. Le equazioni di Hamilton per la prima coppia di variabili sono

$$\dot{q}_1 = \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + 1 \right) p_1, \quad \dot{p}_1 = - \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + 1 \right) q_1, \quad (242)$$

quelle della seconda coppia si ottengono scambiando gli indici. Sfruttiamo il fatto che l'espressione tra parentesi si conserva e riscriviamo le equazioni nella forma

$$\dot{q}_1 = \alpha_2 p_1, \quad \dot{p}_1 = -\alpha_2 q_1, \quad (243)$$

dove si vede chiaramente che le variabili q_2, p_2 non sono assenti, tuttavia entrano soltanto attraverso la costante del moto α_2 . Queste equazioni hanno soluzione

$$q_1 = a_1 \cos(\alpha_2 t + \phi_1), \quad p_1 = -a_1 \sin(\alpha_2 t + \phi_1). \quad (244)$$

Tenendo presente la prima uguaglianza in (240) si ha che $a_1 = \sqrt{2\alpha_1 - 2}$. La soluzione per la seconda coppia di variabili si ottiene scambiando gli indici, per cui possiamo scrivere in forma compatta le soluzioni per le quattro variabili come

$$q_{1,2} = \sqrt{2\alpha_{1,2} - 2} \cos(\alpha_{2,1} t + \phi_{1,2}), \quad p_{1,2} = -\sqrt{2\alpha_{1,2} - 2} \sin(\alpha_{2,1} t + \phi_{1,2}), \quad (245)$$

dove le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \phi_1$ e ϕ_2 sono determinate dalle condizioni iniziali.

- Si consideri un sistema con hamiltoniana

$$H = \left[\frac{p_1^2}{2} + \left(\frac{p_2^2 + q_2^2 + 2}{2} \right) \frac{q_1^2}{2} \right]^2. \quad (246)$$

Si dica quali sono le costanti del moto. Si scrivano i momenti cinetici in funzione di esse e delle rispettive variabili coniugate (completa separabilità). Si scrivano e si risolvano le equazioni di Hamilton.

Questa hamiltoniana ha la struttura incapsulata

$$H = H(g_1(q_1, p_1, g_2(q_2, p_2))) = [g_1(q_1, p_1, g_2(q_2, p_2))]^2, \quad (247)$$

dato che ha una struttura a matrisoska c'è completa separabilità. Inoltre, dato che le variabili q_2 e p_2 compaiono solo attraverso $g_2(q_2, p_2)$ le equazioni per le variabili q_1, p_1 possono essere risolte separatamente, ma non è vero il contrario.

Gli integrali primi sono

$$\alpha_1 = \frac{p_1^2}{2} + (\alpha_2 + 1) \frac{q_1^2}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2}, \quad (248)$$

si conserva inoltre $E = \alpha_1^2$. I momenti cinetici sono

$$p_1 = \pm \sqrt{2\alpha_1 - (\alpha_2 + 1)q_2^2}, \quad p_2 = \pm \sqrt{2\alpha_2 - q_2^2}, \quad (249)$$

c'è quindi completa separabilità.

Per questo sistema le equazioni si disaccoppiano soltanto in parte. Le equazioni di Hamilton per la prima coppia di variabili sono

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \left[\frac{p_1^2}{2} + \left(\frac{p_2^2 + q_2^2 + 2}{2} \right) \frac{q_1^2}{2} \right] 2p_1, \\ \dot{p}_1 &= - \left[\frac{p_1^2}{2} + \left(\frac{p_2^2 + q_2^2 + 2}{2} \right) \frac{q_1^2}{2} \right] \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + 1 \right) 2q_1. \end{aligned} \quad (250)$$

Utilizzando la conservazione di g_1 e g_2 riscriviamo le equazioni nella forma

$$\dot{q}_1 = 2\alpha_1 p_1, \quad \dot{p}_1 = -2\alpha_1(\alpha_2 + 1)q_1, \quad (251)$$

che hanno soluzione

$$q_1 = a_1 \cos(2\alpha_1 \sqrt{\alpha_2 + 1} t + \phi_1), \quad p_1 = -a_1 \sqrt{\alpha_2 + 1} \sin(2\alpha_1 \sqrt{\alpha_2 + 1} t + \phi_1), \quad (252)$$

tenendo presente la prima uguaglianza in (248) si ha che $a_1 = \sqrt{2\alpha_1/(\alpha_2 + 1)}$.

Per la seconda coppia di variabili, sostituendo come al solito le costanti del moto nelle equazioni di Hamilton, otteniamo

$$\dot{q}_2 = \alpha_1 q_1^2 p_2, \quad \dot{p}_2 = -\alpha_1 q_1^2 q_2 \quad (253)$$

che non sono autonome, ma possono essere risolte tenendo conto che già si è trovata la soluzione esplicita (252) per q_1 :

$$q_2 = a_2 \cos\left(\alpha_1 \int_0^t q_1^2(t') dt' + \phi_2\right), \quad p_2 = -a_2 \sin\left(\alpha_1 \int_0^t q_1^2(t') dt' + \phi_2\right), \quad (254)$$

tenendo presente la seconda uguaglianza in (248) si ha che $a_2 = \sqrt{2\alpha_2}$.

Le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \phi_1$ e ϕ_2 che compaiono in tutte le soluzioni sono determinate dalle condizioni iniziali.

Esercizio

- Si consideri un sistema con hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \left(\frac{p_2^2 + q_2^2 + p_3^2 + q_3^2 + 4}{2} \right) \frac{q_1^2}{2} \quad (255)$$

Si dica quali sono le costanti del moto. Si scrivano i momenti cinetici in funzione di esse e delle rispettive variabili coniugate (completa separabilità). Si scrivano e si risolvano le equazioni di Hamilton. Si noti che questa hamiltoniana non ha né struttura incapsulata né decomponibile.

5. Trasformazioni canoniche

5.1 Trasformazioni canoniche e completamente canoniche

Trasformazioni naturali

Le equazioni di Lagrange sono invarianti rispetto a cambiamenti di coordinate nello spazio delle configurazioni, ossia per le trasformazioni naturali. Se ci limitiamo per semplicità notazionale a sistemi con un solo grado di libertà configurazionale ($n = 1$) queste trasformazioni hanno la forma

$$Q = Q(q, t), \quad (256)$$

dove si assume che la $Q = Q(q, t)$ sia differenziabile rispetto a q e t e si assume anche che sia invertibile, ossia che sia possibile scrivere la $q = q(Q, t)$. Per il modo con cui il sistema di Hamilton è stato costruito a partire dalle equazioni di Lagrange, esso risulta a sua volta invariante rispetto a queste trasformazioni. Tuttavia in ambito hamiltoniano bisogna anche specificare come trasformano i momenti cinetici, ossia bisogna trovare la

$$P = P(q, p, t), \quad (257)$$

che viene indotta dalla trasformazione (256). Per stabilire la forma di tale trasformazione, occorre riferirsi alla definizione dei momenti cinetici coniugati in termini di derivate della Lagrangiana.

Per una trasformazione naturale si è visto che la lagrangiana va semplicemente riespressa in funzione della nuova variabile Q e della sua derivata temporale totale. In altre parole, la nuova variabile soddisfa l'equazione di Lagrange con lagrangiana

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t), \quad (258)$$

dove

$$\dot{q}(Q, \dot{Q}, t) = \frac{\partial q(Q, t)}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q(Q, t)}{\partial t}. \quad (259)$$

Per costruire la nuova hamiltoniana abbiamo bisogno del momento cinetico coniugato P che è definito dalla prima uguaglianza qui sotto:

$$P = \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q} = p \frac{\partial q}{\partial Q} = p \left[\frac{\partial Q(q, t)}{\partial q} \right]^{-1}, \quad (260)$$

mentre la seconda uguaglianza è una conseguenza della (258), per la terza abbiamo usato $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q}$ che si deduce dalla (259), per la quarta semplicemente la definizione di $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e per l'ultima

semplicemente l'invertibilità della trasformazione naturale $Q = Q(q, t)$. In ambito hamiltoniano una trasformazione naturale è quindi sempre definita come

$$Q = Q(q, t), \quad P = P(q, p, t) = p \left[\frac{\partial Q(q, t)}{\partial q} \right]^{-1}. \quad (261)$$

Le nuove variabili soddisfano delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana

$$K = P\dot{Q} - L'(Q, \dot{Q}, t) \quad \text{con} \quad \dot{Q} = \dot{Q}(Q, P, t), \quad (262)$$

dove $\dot{Q}(Q, P, t)$ si ottiene invertendo la prima uguaglianza in (260). Vediamo ora quale relazione lega la nuova hamiltoniana K alla vecchia H . Tenendo presente che $H = p\dot{q}(q, p, t) - L$ e che $P = p \left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]^{-1}$, si ha

$$K(Q, P, t) = p \left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial t} \right) - L(q, \dot{q}, t) = H(q, p, t) + p \left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]^{-1} \frac{\partial Q(q, t)}{\partial t}, \quad (263)$$

dove si intende che $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ e che le variabili q, p si intendono espresse in funzione delle nuove variabili Q, P .

L'uguaglianza qui sopra si può riscrivere in un modo che ci sarà utile in seguito come

$$K(Q, P, t) = H'(Q, P, t) + P \frac{\partial Q(q, t)}{\partial t}, \quad (264)$$

dove $H'(Q, P, t) = H(q(Q, t), p(Q, P, t), t)$ e $q = q(Q, t)$. La nuova hamiltoniana non è quindi semplicemente la riscrittura della vecchia hamiltoniana nelle nuove variabili, ma ha un pezzo aggiuntivo, che si annulla soltanto quando la trasformazione è indipendente dal tempo, ossia quando $Q = Q(q)$.

Definizione di trasformazione canonica e completamente canonica.

Poiché un sistema Hamiltoniano è definito spazio delle fasi, non vi è nessun motivo per limitarsi a considerare soltanto le trasformazioni naturali (261) dove le vecchie variabili configurazionali si trasformano in nuove variabili configurazionali (prima uguaglianza in (261)). Si possono al contrario considerare trasformazioni della forma più generale $Q = Q(q, p, t)$, $P = P(q, p, t)$, che nel caso con n generico diventano

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (265)$$

Ammettendo che \mathbf{q} e \mathbf{p} soddisfino le equazioni di Hamilton per una hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, ci si chiede se le nuove variabili \mathbf{Q} e \mathbf{P} soddisfino le equazioni di Hamilton per una qualche hamiltoniana $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$. In generale questo non accade, con l'eccezione di una particolare classe di trasformazioni dette canoniche (che ovviamente include le trasformazioni naturali).

- Più precisamente diremo che una trasformazione (265) è canonica se qualunque sia la hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ che genera le traiettorie $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$ come soluzione dell'associato sistema, esiste una hamiltoniana $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ che genera le traiettorie $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$ e $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$ come soluzione del nuovo sistema.
- Diremo inoltre che una trasformazione canonica è completamente canonica se è indipendente dal tempo, ossia se

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (266)$$

e se la nuova hamiltoniana K è semplicemente la vecchia hamiltoniana H espressa in funzione delle nuove variabili, ossia

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t) \quad (267)$$

dove le $\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, $\mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ si ottengono invertendo le (266).

Queste definizioni implicano che le trasformazioni naturali, che sono sempre canoniche, sono anche completamente canoniche se non dipendono esplicitamente dal tempo, ossia se $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})$. Nel prossimo paragrafo vedremo, tramite esempi, trasformazioni del tipo (265) che sono canoniche e altre che non lo sono. In definitiva, possiamo dire che le trasformazioni canoniche sono un sottoinsieme delle (265) e quelle completamente canoniche sono un sottoinsieme delle canoniche.

Esempi e controesempi

- Il primo esempio riguarda le trasformazioni naturali che sono canoniche e che sono anche completamente canoniche se non dipendono esplicitamente dal tempo, ossia se $Q = Q(q)$. Verifichiamo il caso particolare

$$Q = q^3, \quad P = \frac{p}{3q^2}, \quad \text{con} \quad H = \frac{p^2 + q^2}{2} \quad \rightarrow \quad H' = \frac{9Q^{4/3}P^2 + Q^{2/3}}{2}. \quad (268)$$

Usando le equazioni di Hamilton per le variabili q e p si ottengono facilmente le equazioni di Hamilton per Q e P

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 3q^2 \dot{q} = 3q^2 \frac{\partial H}{\partial p} = 3q^2 p = 9Q^{4/3} P = \frac{\partial H'}{\partial P} \\ \dot{P} &= \frac{\dot{p}}{3q^2} - \frac{2p\dot{q}}{3q^3} = -\frac{1}{3q^2} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{2p}{3q^3} \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{1}{3q} - \frac{2p^2}{3q^3} = -\frac{1}{3Q^{1/3}} - 6P^2 Q^{1/3} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}, \end{aligned} \quad (269)$$

e quindi le nuove variabili soddisfano le equazioni di Hamilton con hamiltoniana H' che non è altro che H espressa nelle nuove variabili.

- La trasformazione indipendente dal tempo definita da

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{p}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{q} \quad (270)$$

è completamente canonica. Infatti, avendo definito

$$H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t) = H(\mathbf{P}, -\mathbf{Q}, t), \quad (271)$$

è immediato verificare che se le \mathbf{q} e \mathbf{p} soddisfano il sistema di hamiltoniana H allora le \mathbf{Q} e \mathbf{P} soddisfano il sistema di equazioni hamiltoniane con hamiltoniana H' . Infatti

$$\dot{Q}_l = -\dot{p}_l = \frac{\partial H}{\partial q_l} = \frac{\partial H'}{\partial P_l}, \quad \dot{P}_l = \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} = -\frac{\partial H'}{\partial Q_l}. \quad (272)$$

- La trasformazione indipendente dal tempo definita da

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{q} \quad (273)$$

è canonica ma non completamente canonica. Infatti, avendo definito $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = -H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ è immediato verificare che se le \mathbf{q} e \mathbf{p} soddisfano il sistema di hamiltoniana H allora le \mathbf{Q} e \mathbf{P} soddisfano il sistema di hamiltoniana K . Si noti che K non coincide con la hamiltoniana H calcolata per le nuove variabili in quanto si ha $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = -H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ e non $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$.

- Si può dimostrare che la trasformazione indipendente dal tempo definita da

$$Q = \phi = \arctan\left(\frac{q}{p}\right), \quad P = A = \frac{q^2 + p^2}{2} \quad (274)$$

è completamente canonica. Scriviamo per comodità l'inversa di questa trasformazione

$$q = \sqrt{2A} \sin\phi, \quad p = \sqrt{2A} \cos\phi, \quad (275)$$

è facile allora verificare che le equazioni di Hamilton sono soddisfatte con hamiltoniana H' :

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{pq - qp}{q^2 + p^2} = \frac{p \frac{\partial H}{\partial p} + q \frac{\partial H}{\partial q}}{q^2 + p^2} = \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial A} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H'}{\partial A}, \\ \dot{A} &= q\dot{q} + p\dot{p} = q \frac{\partial H}{\partial p} - p \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial p}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H'}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (276)$$

- Facciamo adesso un controesempio, ossia mostriamo una semplice trasformazione che non è canonica. Consideriamo un sistema con hamiltoniana $H = \frac{q^2 + p^2}{2}$ e consideriamo la semplice trasformazione

$$Q = q^3, \quad P = p \quad \rightarrow \quad q = Q^{\frac{1}{3}}, \quad p = P. \quad (277)$$

Per le derivate delle nuove variabili possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 3q^2 \dot{q} = 3q^2 \frac{\partial H}{\partial p} = 3q^2 p = 3Q^{\frac{2}{3}} P, \\ \dot{P} &= \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q = -Q^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (278)$$

quindi perché la trasformazione sia canonica deve esistere una hamiltoniana $K(Q, P, t)$ tale che:

$$3Q^{\frac{2}{3}} P = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad -Q^{\frac{1}{3}} = -\frac{\partial K}{\partial Q}. \quad (279)$$

Per integrazione si ottiene

$$K = \frac{3}{2} Q^{\frac{2}{3}} P^2 + f(Q, t), \quad K = \frac{3}{4} Q^{\frac{4}{3}} + g(P, t), \quad (280)$$

ove f e g sono due qualsiasi funzioni dei rispettivi argomenti. È facile rendersi conto che non esistono K , f e g tali da soddisfare entrambe le uguaglianze qui sopra.

5.2 Condizione necessaria e sufficiente per la completa canonicità

Invarianza delle parentesi di Poisson e completa canonicità

Una condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione indipendente dal tempo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (281)$$

sia completamente canonica è

$$\{Q_l, P_m\} = \delta_{l,m}, \quad \{Q_l, Q_m\} = \{P_l, P_m\} = 0, \quad (282)$$

dove le parentesi sono calcolate derivando rispetto alle vecchie variabili.

Per semplicità dimostriamo questa asserzione nel caso di una sola variabile, l'estensione al caso di più variabili è immediato. Dobbiamo dimostrare quindi che una trasformazione

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p) \quad (283)$$

è completamente canonica se e solo se $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = 1$ (si noti infatti che $\{Q, Q\} = 0$, $\{P, P\} = 0$ sono identicamente verificate).

Dalla (283) e dalle equazioni di Hamilton si ottiene immediatamente la seguente coppia di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{P} &= \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial P}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned} \quad (284)$$

A questo punto definiamo H' a partire dalla hamiltoniana H per semplice sostituzione delle variabili, ossia

$$H'(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t) \rightarrow H(q, p, t) = H'(Q(q, p), P(q, p), t), \quad (285)$$

dove la prima relazione si ottiene a partite dalle inverse $q(Q, P)$, $p(Q, P)$ delle (283) cosicché la seconda relazione è una banale conseguenza della prima. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H'}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H'}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q}, \quad (286)$$

che sostituite nella (284) danno

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} \{Q, P\}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \{Q, P\}. \quad (287)$$

Quindi, come si voleva dimostrare, la trasformazione è completamente canonica se e solo se $\{Q, P\} = 1$. Infatti, se $\{Q, P\} = 1$, le equazioni qui sopra sono di Hamilton con stessa Hamiltoniana (espressa nelle nuove variabili), viceversa, se le equazioni per Q e P sono di Hamilton con stessa Hamiltoniana, necessariamente $\{Q, P\} = 1$.

5.3 Condizione sufficiente per la canonicità

Equazioni di Hamilton in forma di equazioni di Lagrange

Le equazioni di Hamilton possono essere scritte come equazioni di Lagrange. È necessario preliminarmente definire la lagrangiana

$$\Lambda(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = p\dot{q} - H(q, p, t), \quad (288)$$

dove q e p sono le variabili lagrangiane e \dot{p} e \dot{q} le relative derivate. Si noti che non viene stabilita nessuna relazione a priori tra le due variabili lagrangiane (ossia p non è una funzione di q , \dot{q} e t ma è una nuova variabile lagrangiana!). È facile verificare che sono soddisfatte le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial p} = 0, \quad (289)$$

infatti queste coincidono con le equazioni di Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (290)$$

per verificarlo basta tenere presente che dalla definizione (288) si ricava immediatamente che $\frac{\partial \Lambda}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, $\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} = p$, $\frac{\partial \Lambda}{\partial p} = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}$ e $\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{p}} = 0$. Sostituendo poi queste quattro uguaglianze nelle (289) si ricavano banalmente le (290).

Il risultato qui trovato può essere facilmente esteso al caso in cui $n > 1$, ossia il caso in cui le variabili lagrangiane in Λ sono le $2n$ variabili scalari $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. In tal caso avremo che per lagrangiana

$$\Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (291)$$

sono soddisfatte le $2n$ equazioni di lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} = 0 \quad (292)$$

È molto importante fare bene attenzione al fatto che questa lagrangiana non è $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, ossia non è quella che si è eventualmente usata per ricavare la hamiltoniana, ma una nuova lagrangiana totalmente differente. Basti notare che il numero di variabili lagrangiane non è n , bensì è $2n$.

Trasformazioni che conservano l'identità tra equazioni di Lagrange e di Hamilton.

Per semplicità di esposizione torniamo al caso $n = 1$. Riscriviamo il risultato esposto nella conclusione del paragrafo 1.6 tenendo presente che il ruolo di \mathbf{q} in 1.6 è in questo contesto giocato dalla coppia q, p e il ruolo di \mathbf{Q} dalla coppia Q, P .

Siano (q, p) due variabili che soddisfano le equazioni di Lagrange (289), avremo allora che per una qualsiasi trasformazione

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t), \quad (293)$$

le equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \Lambda'}{\partial Q} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \dot{P}} - \frac{\partial \Lambda'}{\partial P} = 0 \quad (294)$$

sono soddisfatte per la lagrangiana Λ' definita come

$$\Lambda'(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) = \Lambda(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) - \frac{dF}{dt}(Q, P, t), \quad (295)$$

dove nell'espressione a destra si intende che $q = q(Q, P, t)$, $p = p(Q, P, t)$, $\dot{q} = \dot{q}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial q}{\partial t}$ e $\dot{p} = \dot{p}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) = \frac{\partial p}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial p}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial p}{\partial t}$ e dove $F = F(Q, P, t)$ è una qualsiasi funzione di Q, P e t .

Si tenga presente che con le ultime tre formule abbiamo semplicemente riscritto i risultati contenuti nella conclusione del paragrafo 1.6, adattandoli al nostro contesto.

Perché le equazioni (294) siano equivalenti alle equazioni di Hamilton

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad (296)$$

è sufficiente che si abbia una hamiltoniana $K(Q, P, t)$ per la quale

$$\Lambda'(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) = P\dot{Q} - K(Q, P, t), \quad (297)$$

per dimostrarlo basta ripetere gli stessi calcoli fatti nel precedente sotto-paragrafo per Λ . Tuttavia, a differenza della (288) che è la definizione di Λ , quest'ultima uguaglianza è una condizione, dato che Λ' è assegnato. È evidente che può non essere soddisfatta perché l'espressione a destra dell'uguaglianza (297) è molto specifica, ad esempio non contiene \dot{P} ed è lineare in \dot{Q} . Questo implica che non tutte le trasformazioni (293) sono canoniche.

Date la (288) e la (295) (che vale per ogni F), la condizione (297) può essere riscritta come

$$P\dot{Q} - K(Q, P, t) = p\dot{q} - H(q, p, t) - \frac{dF}{dt}(Q, P, t). \quad (298)$$

sempre tenendo conto che $q = q(Q, P, t)$, $p = p(Q, P, t)$ e $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial q}{\partial t}$.

In definitiva, le nuove variabili Q e P soddisfano anch'esse una equazione di Hamilton se la relazione (298) è soddisfatta per qualche hamiltoniana K e per qualche funzione F . Essa è quindi una condizione sufficiente per la canonicità della trasformazione (293).

In conclusione

Il risultato può essere facilmente esteso al caso di più variabili, in tal caso la condizione sufficiente può essere espressa come segue: siano \mathbf{q} e \mathbf{p} le $2n$ variabili che soddisfano le equazioni di Hamilton con hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e data la trasformazione

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (299)$$

le nuove variabili Q e P soddisfano anch'esse una equazione di Hamilton con hamiltoniana $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ se

$$\sum_{l=1}^n P_l \dot{Q}_l - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{l=1}^n p_l \dot{q}_l - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \frac{dF}{dt}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (300)$$

è soddisfatta per qualche hamiltoniana K e per qualche funzione F . È inteso naturalmente che \mathbf{q} , \mathbf{p} e $\dot{\mathbf{q}}$ vanno espresse in funzione di \mathbf{Q} , \mathbf{P} , $\dot{\mathbf{Q}}$, $\dot{\mathbf{P}}$ e t tramite le (299).

5.4 Funzioni generatrici delle trasformazioni canoniche

Esistenza della funzione generatrice come condizione sufficiente per la canonicità

Abbiamo visto che la validità dell'equazione (300) è una condizione sufficiente perché una trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sia canonica.

Esprimiamo ora F in funzione di \mathbf{q} , \mathbf{Q} e t (la chiameremo F_1). La (300) riscritta come una uguaglianza tra due forme differenziali diventa quindi

$$\sum_{l=1}^n P_l dQ_l - K dt = \sum_{l=1}^n p_l dq_l - H dt - dF_1, \quad (301)$$

dove F_1 prende il nome di funzione generatrice delle trasformazioni canoniche. Tenendo presente la seguente l'espressione esplicita del differenziale dF_1

$$dF_1 = \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_l} dq_l + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_l} dQ_l + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (302)$$

e quindi sostituendo nella (301), si ottiene

$$\sum_{l=1}^n \left(P_l + \frac{\partial F_1}{\partial Q_l} \right) dQ_l - \sum_{l=1}^n \left(p_l - \frac{\partial F_1}{\partial q_l} \right) dq_l + \left(H - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0, \quad (303)$$

che è soddisfatta se

$$p_l = \frac{\partial F_1}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad P_l = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \quad (304)$$

e se

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \quad (305)$$

Dalle equazioni (304) si possono ricavare $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ oppure $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$, che esprimono trasformazione canonica. Usando questa trasformazione nella (305) si ottiene esplicitamente la nuova hamiltoniana $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$. Si noti che sia la trasformazione canonica che la nuova hamiltoniana sono completamente determinati dalla funzione generatrice F_1 .

In definitiva, una condizione sufficiente per la canonicità di una trasformazione è l'esistenza di una funzione generatrice F_1 tale che le equazioni (304) siano soddisfatte. In tal caso, la hamiltoniana K è data dalla (305).

Se la funzione generatrice non dipende esplicitamente dal tempo ($F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$) anche la trasformazione non dipende esplicitamente dal tempo, inoltre la nuova hamiltoniana è uguale alla vecchia espressa nelle nuove variabili. Quindi la trasformazione indotta da una funzione generatrice che non ha dipendenza esplicita da t è completamente canonica.

Sistematica delle funzioni generatrici

La funzione generatrice $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ è detta di prima specie e la sua caratteristica principale è di essere scritta come una funzione di \mathbf{q} e \mathbf{Q} e del tempo.

Le trasformazioni canoniche possono essere ottenute anche a partire da funzioni generatrici nella forma $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ oppure $F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$ oppure $F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$ che si chiamano di seconda, terza e quarta specie.

Per ottenere queste funzioni e definirne l'uso, torniamo alla uguaglianza (301) e riscriviamola come

$$d \left(\sum_{l=1}^n Q_l P_l \right) - \sum_{l=1}^n Q_l dP_l - K dt = \sum_{l=1}^n p_l dq_l - H dt - dF_1. \quad (306)$$

Se definiamo $F_2 = F_1 + \sum_{l=1}^n Q_l P_l$, espressa in funzione delle variabili \mathbf{q}, \mathbf{P} e t , possiamo riscrivere questa uguaglianza come

$$- \sum_{l=1}^n Q_l dP_l - K dt = \sum_{l=1}^n p_l dq_l - H dt - dF_2, \quad (307)$$

dove

$$dF_2 = \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_l} dq_l + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_l} dP_l + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt. \quad (308)$$

Sostituendo quest'ultimo differenziale nella (307) e confrontando le forme differenziali come si è fatto in precedenza per la F_1 , si ottiene

$$p_l = \frac{\partial F_2}{\partial q_l}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad Q_l = \frac{\partial F_2}{\partial P_l}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad (309)$$

dalle quali si possono ricavare $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ oppure $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$. Anche la hamiltoniana K per le nuove variabili Q e P viene assegnata dalla funzione generatrice. Confrontando le forme differenziali si ottiene infatti

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad (310)$$

dove si intende sempre che $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$.

In modo del tutto analogo si procede con $F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = F_1 - \sum_{l=1}^n q_l p_l$ per la quale si ottengono le relazioni

$$q_l = -\frac{\partial F_3}{\partial p_l}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \quad P_l = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_l}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) \quad (311)$$

e la hamiltoniana

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t). \quad (312)$$

Infine, avendo definito $F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = F_1 - \sum_{l=1}^n q_l p_l + \sum_{l=1}^n Q_l P_l$, si ottengono le relazioni

$$q_l = -\frac{\partial F_4}{\partial p_l}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \quad Q_l = \frac{\partial F_4}{\partial P_l}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) \quad (313)$$

e la hamiltoniana

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t). \quad (314)$$

In definitiva, le trasformazioni canoniche si possono ottenere a partire da tutte e quattro le funzioni generatrici per mezzo dalle (304), (309), (311) e (313). Inoltre, qualunque sia la specie $u = 1, 2, 3, 4$ della funzione generatrice, si avrà per la nuova hamiltoniana

$$K = H + \frac{\partial F_u}{\partial t}. \quad (315)$$

Si noti che la (315), insieme alle (304), (309), (311) e (313), implica che le trasformazioni sono completamente canoniche se le F_u non dipendono esplicitamente dal tempo.

Si tenga presente infine che la numerazione delle funzioni generatrici è arbitraria e può capitare che in alcuni testi il nome della funzione di seconda specie e quella di terza siano invertite.

Le funzioni generatrici permettono appunto di generare una trasformazione canonica, oppure di verificare se una trasformazione data è canonica, questo risulterà chiaro dagli esercizi che seguono.

Esercizi svolti

- Si consideri la trasformazione $Q = qp^\alpha$, $P = \beta \ln(p)$; dire per quali valori di α e β è completamente canonica.

Perché la trasformazione sia completamente canonica è necessario e sufficiente che la parentesi di Poisson fondamentale sia uguale a 1, quindi:

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \beta p^{\alpha-1} = 1, \quad (316)$$

quindi $\beta=1$, $\alpha=1$. L'unica trasformazione canonica è quindi $Q=qp$, $P=\ln(p)$.

- Si consideri la trasformazione $Q = p(1+q)^\gamma$, $P = \alpha(1+q)^\beta$; dire per quali valori di α e β è completamente canonica.

Anche in questo caso si può usare la parentesi di Poisson fondamentale:

$$\{Q, P\} = -\alpha\beta(1+q)^{\gamma+\beta-1} = 1, \quad (317)$$

quindi $-\alpha\beta = 1$, $\gamma + \beta - 1 = 0 \rightarrow \beta = 1 - \gamma$, $\alpha = \frac{1}{\gamma-1}$. Quindi per ogni $\gamma \neq 1$ c'è una trasformazione completamente canonica della forma $Q = p(1+q)^\gamma$, $P = \frac{1}{\gamma-1}(1+q)^{1-\gamma}$.

- Si consideri la trasformazione $Q = Q(q)$, $P = pR(q)$; dire per quale funzione $R(q)$ è completamente canonica.

Ancora una volta si può usare la parentesi di Poisson fondamentale:

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q(q)}{\partial q} R(q) = 1, \quad (318)$$

quindi $R(q) = \left[\frac{\partial Q(q)}{\partial q} \right]^{-1}$. Questa trasformazione completamente canonica non è altro che la trasformazione naturale indipendente dal tempo.

- Si consideri la trasformazione $Q_1 = (q_2)^3$, $P_1 = \alpha p_2 (q_2)^\beta$, $Q_2 = (q_1)^3$, $P_2 = \alpha p_1 (q_1)^\beta$; dire per quali valori di α e β è completamente canonica.

Perché la trasformazione sia completamente canonica è necessario e sufficiente che le parentesi di Poisson fondamentali soddisfino

$$\{Q_1, P_1\} = \{Q_2, P_2\} = 1, \quad \{Q_1, P_2\} = \{Q_2, P_1\} = \{Q_1, Q_2\} = \{P_1, P_2\} = 0. \quad (319)$$

Calcoliamo le parentesi:

$$\{Q_1, P_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0. \quad (320)$$

Questa relazione è soddisfatta per qualsiasi valore delle costanti α e β . Analogamente si verifica che $\{Q_2, P_1\} = 0$, $\{Q_2, P_1\} = 0$, e $\{P_1, P_2\} = 0$ per qualsiasi valore delle costanti. Si ha inoltre

$$\{Q_1, P_1\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_1}{\partial q_2} = 3\alpha(q_2)^{2+\beta}, \quad (321)$$

analogamente si trova $\{Q_1, P_1\} = 3\alpha(q_2)^{2+\beta}$. Entrambe queste parentesi sono identicamente uguali a uno se e solo se $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -2$.

- Trovare la trasformazione canonica generata dalla funzione di prima specie $F_1(q, Q, t) = q^2 + Q^2 + qQ$. Dalle (304) si ottiene facilmente

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2q + Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -2Q - q, \quad (322)$$

che possono essere esplicitate come

$$Q = p - 2q, \quad P = 3q - 2p; \quad q = -P - 2Q, \quad p = -3Q - 2P. \quad (323)$$

La trasformazione non dipende esplicitamente dal tempo per cui qualunque sia la hamiltoniana essa rimane invariata e va solo riespressa nelle nuove variabili. Se ad esempio era $H = \frac{(3q-2p)^2}{2}$ avremo

$$H'(Q, P) = \frac{P^2}{2}, \quad (324)$$

con equazioni di Hamilton banalmente risolvibili: $P(t) = P_0$, $Q(t) = Q_0 + P_0 t$. Queste soluzioni, dopo aver posto $Q_0 = p_0 - 2q_0$, $P_0 = 3q_0 - 2p_0$, possono essere inserite nella terza e nella quarta uguaglianza in (323) fornendo la soluzione $q(t)$, $p(t)$ del problema con hamiltoniana $H = \frac{(3q-2p)^2}{2}$ e dato iniziale q_0, p_0 .

- Trovare la trasformazione canonica generata dalla funzione di seconda specie $F_2(q, P, t) = Q(q, t)P$, mostrare che questa trasformazione è naturale e determinare la nuova hamiltoniana. Fare il calcolo esplicito nel caso in cui $Q(q, t) = (1 + t^2)q^3$ e la hamiltoniana di partenza è $H = \frac{p^2}{(1+t^2)^2 q^4}$.

Per le funzioni generatrici di seconda specie si ha $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$, $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ per cui

$$Q = Q(q, t), \quad p = P \frac{\partial Q(q, t)}{\partial q}. \quad (325)$$

Queste sono trasformazioni naturali di cui si è già parlato, infatti per queste trasformazioni la nuova variabile Q dipende solo da q e da t ma non da p .

Esplicitando queste espressioni rispetto alla nuove variabili Q e P e rispetto alle vecchie q e p si ha:

$$Q = Q(q, t), \quad P = p \left(\frac{\partial Q(q, t)}{\partial q} \right)^{-1}; \quad q = q(Q, t), \quad p = P \left(\frac{\partial q(Q, t)}{\partial Q} \right)^{-1}, \quad (326)$$

dove $q(Q, t)$ è l'inversa della $Q(q, t)$.

Nel caso di n variabili lagrangiane la funzione generatrice delle trasformazioni naturali deve essere $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \mathbf{P} = \sum_{k=1}^n Q_k(q_1, \dots, q_n, t) P_k$.

Torniamo al caso unidimensionale, la nuova hamiltoniana si determina a partire dalla (310):

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + P \frac{\partial Q(q, t)}{\partial t}, \quad (327)$$

dove, in accordo con la (326), si intende che $q = q(Q, t)$, $p = P \left(\frac{\partial q(Q, t)}{\partial Q} \right)^{-1}$. Questa equazione evidentemente coincide con la (263) stabilita all'inizio di questo capitolo.

Nel caso in cui $Q(q, t) = (1 + t^2)q^3$ si avrà dalla (326):

$$Q = (1 + t^2)q^3, \quad P = \frac{p}{3(1 + t^2)q^2}; \quad q = \left(\frac{Q}{1 + t^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad p = 3P(1 + t^2)^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{2}{3}}. \quad (328)$$

Tenendo inoltre presente che $\frac{\partial Q(q, t)}{\partial t} = 2tq^3$ e che $q^3 = \frac{Q}{1+t^2}$ si ha immediatamente la nuova hamiltoniana

$$K(Q, P, t) = 9P^2 + \frac{2t}{1 + t^2} QP. \quad (329)$$

- Si consideri la trasformazione

$$Q = p^2 q, \quad P = \alpha q^\beta p^\gamma, \quad (330)$$

si utilizzi il criterio basato sull'esistenza di una funzione generatrice per stabilire per quali valori delle costanti α , β e γ è canonica.

Dalle equazioni qui sopra è facile ricavare

$$p = q^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}, \quad P = \alpha q^{\frac{2\beta-\gamma}{2}} Q^{\frac{\gamma}{2}}, \quad (331)$$

e quindi confrontando con (304)

$$\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = q^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q} = -\alpha q^{\frac{2\beta-\gamma}{2}} Q^{\frac{\gamma}{2}}, \quad (332)$$

che possono essere integrate come

$$F_1 = 2q^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} + f(Q) \quad F_1 = -\frac{2\alpha}{2+\gamma} q^{\frac{2\beta-\gamma}{2}} Q^{\frac{2+\gamma}{2}} + g(q), \quad (333)$$

dove f è una qualsiasi funzione di Q e g è una qualsiasi funzione di q . Perché esista F_1 è necessario che le due espressioni qui sopra siano identiche, quindi è necessario prima di tutto che f e g siano entrambe nulle, è inoltre necessario che $-\frac{2\alpha}{2+\gamma} = 2$, $\frac{2\beta-\gamma}{2} = \frac{1}{2}$ e $\frac{2+\gamma}{2} = \frac{1}{2}$. Queste ultime tre uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $\alpha = \gamma = -1$ e $\beta = 0$.

A differenza dei precedenti due esercizi dove abbiamo ricavato la trasformazione canonica a partire da una funzione generatrice assegnata, qui abbiamo fatto l'inverso: data una trasformazione ne abbiamo stabilito la canonicità cercandone la generatrice. Infine, dato che la trasformazione è completamente canonica, lo studente può verificare il risultato ottenuto utilizzando le parentesi di Poisson.

6. Approfondimenti sui sistemi hamiltoniani

6.1 Le variabili azione-angolo per sistemi con un grado di libertà

Librazioni e rotazioni e definizione della variabile azione

Le variabili azione-angolo, che hanno avuto una particolare rilevanza nello sviluppo storico della Meccanica Quantistica, sono uno strumento efficace per studiare i moti periodici. Esaminiamo per il momento il caso semplice di sistemi hamiltoniani ad un grado di libertà, generalizzeremo in seguito al caso di sistemi completamente separabili a più gradi di libertà.

Nei moti periodici la hamiltoniana H non ha dipendenza esplicita dal tempo per cui si può usare la conservazione dell'energia per esprimere il momento in funzione della variabile configurazionale e dell'energia stessa, in simboli:

$$E = H(q, p) \quad \rightarrow \quad p = p(q, E). \quad (334)$$

Ad esempio per l'oscillatore armonico si ha:

$$E = \frac{p^2}{2m} + k \frac{q^2}{2} \quad \rightarrow \quad p = \pm \sqrt{m(2E - kq^2)}. \quad (335)$$

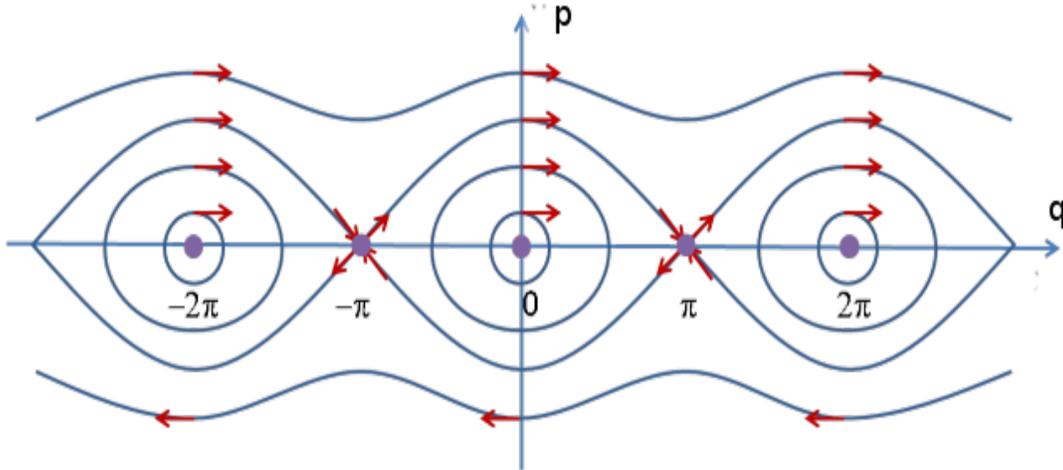


Figura 17. Il pendolo con hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} - mg \cos q$, il momento p è in ordinata e l'angolo q è in ascissa. Se $-mg < E < mg$ le orbite sono chiuse e il moto è periodico; in questo caso si parla di *librazioni*. Se $E > mg$ le orbite sono aperte ma periodiche, infatti quando q varia di 2π il sistema torna nello stesso stato fisico (stesso momento e stessa posizione sulla guida circolare di raggio unitario); in questo caso si parla di *rotazioni*.

Ci sono due modi in cui il moto può essere periodico. Nel primo il sistema segue orbite chiuse sul piano delle fasi, nel secondo il sistema è su orbite aperte periodiche, ma ad ogni periodo, ritorna alle stesse condizioni fisiche. Per capire meglio si consideri un pendolo, ossia un punto materiale di massa m vincolato senza attrito a una guida circolare verticale di raggio R . Se scegliamo $R = 1$, la sua hamiltoniana è $H = \frac{p^2}{2m} - mg \cos q$ dove q è l'angolo formato con la verticale e $g = 982 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. Il suo momento è

$$p = \pm \sqrt{2m(E + mg \cos q)}. \quad (336)$$

Se $-mg < E < mg$ le orbite sono chiuse e il moto è periodico (si veda figura 17); in questo caso si parla di *librazioni*. Se $E > mg$ le orbite sono aperte ma periodiche (si veda ancora figura 17), infatti quando q varia di 2π il sistema torna nello stesso stato fisico (stesso momento e stessa posizione sulla guida circolare); in questo caso si parla di *rotazioni*.

Per sistemi conservativi ad un grado di libertà con orbite periodiche, l'azione A è definita come

$$A = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq = A(E), \quad (337)$$

dove l'integrale è su tutta l'orbita periodica. La variabile A dipende solo dall'energia ed è pertanto un integrale del moto. Se la (337) può essere invertita otteniamo anche

$$E = E(A).$$

Nel caso del pendolo il segno di p nell'integrale (337) è positivo quando si integra da sinistra a destra nel ramo superiore dell'orbita nello spazio delle fasi e negativo quando si integra da destra a sinistra nel ramo inferiore. Quindi nel caso delle librazioni ($-mg < E < mg$) si ha

$$A = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{m(2E + mg \cos q)} dq \quad (338)$$

dove q_- e q_+ sono i due valori per i quali $p(q, E)$ si annulla e dove si è fatto uso della simmetria tra il ramo superiore e quello inferiore dell'orbita sul piano delle fasi. Nel caso delle rotazioni ($E > mg$) invece

$$A = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{m(2E + mg \cos q)} dq. \quad (339)$$

Secondo la definizione di integrale sull'orbita periodica il fattore 2 in questa seconda equazione i non ci dovrebbe essere e può essere tranquillamente omesso. Esso viene introdotto qui soltanto per evitare una discontinuità nel valore dell'azione quando si attraversa la soglia $E = mg$. Questa stessa scelta può essere fatta per tutti i moti periodici rotatori.

Nel caso dell'oscillatore armonico il moto è periodico e libratorio per ogni energia strettamente positiva per cui

$$A = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{m(2E - kq^2)} dq = \frac{E}{\omega}, \quad (340)$$

dove q_- e q_+ sono i due valori in cui l'espressione sotto radice si annulla e dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è la frequenza (pulsazione).

Variabili azione-angolo come nuove variabili hamiltoniane e la trasformazione completamente canonica che le determina.

Possiamo interpretare la variabile azione $A(E)$ come una nuova coordinata hamiltoniana $A(q, p)$ esprimendo E in funzione di q e p , tuttavia è necessario trovare la variabile coniugata. Facciamo ora vedere che in effetti è possibile introdurre una nuova coordinata ϕ (angolo) in modo che la trasformazione $(q, p) \rightarrow (\phi, A)$ sia canonica.

Definiamo la funzione generatrice di seconda specie

$$F_2 = \int_{q^{(0)}}^q p(q', E(A)) dq' = F_2(q, A), \quad (341)$$

dove la scelta di $q^{(0)}$ è arbitraria. Dato che per costruzione

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = p(q, A),$$

basterà definire la nuova variabile angolo come

$$\phi = \frac{\partial F_2}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_{q^{(0)}}^q p(q', E(A)) dq' = \phi(q, A). \quad (342)$$

Nel caso dell'oscillatore armonico con la scelta $q^{(0)} = 0$ si trova

$$\phi = \frac{\partial}{\partial A} \int_0^q \sqrt{m(2A\omega - m\omega^2 q'^2)} dq' = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\omega m}{2A}} q \right). \quad (343)$$

Esplicitando l'energia E in funzione delle vecchie coordinate (q, p) le equazioni (340) e (343) si possono riscrivere come la trasformazione completamente canonica $(q, p) \rightarrow (\phi, A)$

$$\phi = \arcsin \left(\frac{q}{\sqrt{p^2/mk + q^2}} \right), \quad A = \frac{p^2}{2m\omega} + m\omega \frac{q^2}{2}. \quad (344)$$

Torniamo al caso generale. La nuova variabile ϕ si chiama angolo perché la sua variazione su un periodo, ottenibile a partire dalla (342), è

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial A} \oint p(q', E(A)) dq' = \frac{\partial}{\partial A}(2\pi A) = 2\pi. \quad (345)$$

Per finire notiamo che per costruzione la nuova hamiltoniana è $H'(A) = E(A)$, per cui le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{A} = -\frac{\partial H'}{\partial \phi} = 0 \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H'}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial A} := \Omega(A), \quad (346)$$

che implicano che sia A che $\Omega(A)$ sono costanti. La seconda equazione ha soluzione $\phi(t) = \phi_0 + \Omega t$, dato che ϕ varia di 2π in un periodo T , si ottiene immediatamente $T = 2\pi/\Omega = 2\pi \frac{\partial A}{\partial E}$. Nel caso dell'oscillatore armonico $\Omega = \omega = \sqrt{k/m}$ e quindi $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Esercizi svolti

- Si consideri un gas unidimensionale in una scatola, ossia un punto materiale in un potenziale che è nullo se $x \in [0, L]$ e infinito altrimenti. Si calcolino la variabile azione e la frequenza $\Omega(A)$.

Il punto si muove liberamente all'interno della scatola e rimbalza elasticamente invertendo la velocità quando ne urta le pareti. L'energia è $E = \frac{p^2}{2m}$ e quindi $p = \pm\sqrt{2mE}$. Si calcola immediatamente l'azione :

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^L \sqrt{2mE} dq = \frac{\sqrt{2mEL}}{\pi} = \frac{|p|L}{\pi}, \quad \rightarrow \quad E = \frac{\pi^2 A^2}{2mL^2}, \quad |p| = \frac{\pi A}{L}. \quad (347)$$

Dalla seconda delle uguaglianze qui sopra si ricava subito

$$\Omega(A) = \frac{\partial E}{\partial A} = \frac{A\pi^2}{mL^2}. \quad (348)$$

Si noti che sia A che $\Omega(A)$ dipendono anche da L che però è solo un parametro.

- Si calcolino la variabile azione e la frequenza $\Omega(A)$ per un punto materiale con hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \left(\frac{2q}{L}\right)^{2l}, \quad (349)$$

dove l è un numero intero positivo e L è un numero reale strettamente positivo. Si trovino inoltre le soluzioni delle equazioni del moto per le variabili ϕ , A e per le variabili q , p .

L'azione è la seguente:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{2m[E - (2q/L)^{2l}]} dq = \frac{m^{\frac{1}{2}} L E^{\frac{l+1}{2l}}}{2^{\frac{1}{2}} \pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^{2l}} dx = \frac{\beta(l) m^{\frac{1}{2}} L E^{\frac{l+1}{2l}}}{2^{\frac{1}{2}} \pi}, \quad (350)$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo eseguito il cambio di variabile di integrazione $q = \frac{L}{2} E^{\frac{1}{2l}} x$ e dove $\beta(l) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^{2l}} dx$ è un numero che cresce con l e che è compreso tra $\frac{\pi}{2}$ (quando $l = 1$) e 2 (quando $l \rightarrow \infty$). Da queste uguaglianze otteniamo

$$E = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} \pi A}{\beta(l) m^{\frac{1}{2}} L} \right)^{\frac{2l}{l+1}} \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{\partial E}{\partial A} = \frac{2l}{l+1} \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} \pi}{\beta(l) m^{\frac{1}{2}} L} \right)^{\frac{2l}{l+1}} A^{\frac{l-1}{l+1}}. \quad (351)$$

Notiamo prima di tutto che nel caso $l = 1$ la hamiltoniana (349) è quella di un oscillatore armonico. Possiamo in questo caso rinominare i parametri ponendo $L = \left(\frac{8}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$ così da poter scrivere $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$. Tenendo presente che $\beta(1) = \frac{\pi}{2}$ e che come al solito si definisce $\omega = \frac{k}{m}$ si ha dalla (350) che $A = \frac{E}{\omega}$ e dalla (351) che $E = A\omega$ e $\Omega = \omega$.

Più interessante è vedere quello che succede quando $l \rightarrow \infty$. Tenendo presente che in questo limite $\beta(l) \rightarrow 2$, le uguaglianze (350) e (351) diventano

$$A = \frac{\sqrt{2mEL}}{\pi}, \quad E = \frac{\pi^2 A^2}{2mL^2}, \quad \Omega = \frac{A\pi^2}{mL^2}, \quad (352)$$

che coincidono con le (347) e (348). Quindi nel limite $l \rightarrow \infty$ il potenziale (349) diventa quello di un gas unidimensionale con lunghezza L della scatola (lasciamo agli studenti la spiegazione di questo fatto).

- Si consideri la hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m(1+q^2)} - \frac{1}{1+q^2}$ con $-1 < E < 0$ (con questa scelta il moto è periodico) e si trovi l'azione A in funzione dell'energia E e la frequenza Ω in funzione di A .

Per questo sistema si ha $p = \pm \sqrt{2m(E+1+Eq^2)}$, tenendo presente che $E < 0$ e $E+1 > 0$ è facile calcolare esplicitamente l'azione e la frequenza. Si ponga $E' = E+1$ (quantità positiva) e anche $k = -2E$ (quantità positiva), si avrà $p = \pm \sqrt{2m(E' - \frac{k}{2}q^2)}$, a questo punto si proceda come per l'oscillatore armonico ottenendo $E' = A\sqrt{k/m} \rightarrow E+1 = A\sqrt{-2E/m}$, dove per la seconda uguaglianza si è eseguita la sostituzione inversa. Esplicitando quest'ultima uguaglianza si ottiene

$$A = \frac{E+1}{\sqrt{-2E/m}} \quad (353)$$

$$E = -\left(1 + \frac{A^2}{m}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{m}\right)^2 - 1},$$

dove bisogna scegliere il segno positivo davanti alla radice in modo che $-1 < E < 0$. Per ottenere la frequenza $\Omega(A)$ basta derivare l'ultima espressione rispetto ad A .

6.2 Le variabili azione-angolo per sistemi con più gradi di libertà

Completa separabilità e variabili azione

Consideriamo il caso di un sistema conservativo a più gradi di libertà, se si ha completa separabilità possiamo scrivere per ogni grado di libertà

$$p_l = p_l(q_l, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (354)$$

dove $l = 1, 2, \dots, n$. Le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono integrali del moto indipendenti e l'energia è esprimibile come $E = E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Si supponga poi che tutti gli n sistemi unidimensionali componenti siano individualmente periodici per valori fissati degli integrali del moto, si possono allora definire le variabili azione come

$$A_l = \frac{1}{2\pi} \oint p_l(q_l, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) dq_l. \quad (355)$$

Si noti che il sistema non deve necessariamente essere globalmente periodico, infatti gli n sistemi componenti possono avere frequenze (e quindi periodi) diversi e incommensurabili.

Per ogni i , dalla (355) si ottiene che $A_l = A_l(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e quindi tutte le A_l sono integrali del moto. Questa relazioni possono essere scritte in forma compatta come

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A}), \quad (356)$$

dove si intende che $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ e $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Le variabili azione-angolo dei sistemi a più gradi di libertà sono anch'esse canoniche

Anche nel caso di più gradi di libertà possiamo interpretare le variabili azione $A_l(\boldsymbol{\alpha})$ come nuove coordinate hamiltoniana $A_l(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ esprimendo $\boldsymbol{\alpha}$ in funzione di \mathbf{q} e \mathbf{p} . Le variabili coniugate $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ devono essere scelte in modo che la trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A})$ sia canonica.

Definiamo la funzione generatrice di seconda specie

$$F_2 = \sum_{l=1}^n \int_{q_l^{(0)}}^{q_l} p_l(q, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A})) dq = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{A}), \quad (357)$$

dove la scelta delle $q_l^{(0)}$ è arbitraria. Dato che per costruzione

$$p_l = \frac{\partial F_2}{\partial q_l} = p_l(q_l, \mathbf{A}), \quad (358)$$

basterà definire le nuove variabili angolo come

$$\phi_l = \frac{\partial F_2}{\partial A_l} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial A_l} \int_{q_m^{(0)}}^{q_m} p_m(q, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A})) dq = \phi_l(\mathbf{q}, \mathbf{A}). \quad (359)$$

Per finire notiamo che per costruzione la nuova hamiltoniana è $H'(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A})) = E(\mathbf{A})$, per cui le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{A}_l = -\frac{\partial H'}{\partial \phi_l} = 0 \quad \dot{\phi}_l = \frac{\partial H'}{\partial A_l} = \frac{\partial E}{\partial A_l} := \Omega_l(\mathbf{A}), \quad (360)$$

dato che le $\Omega_l(\mathbf{A})$ sono costanti la soluzione di queste equazioni è banale.

L'esempio dei moti kepleriani e kepleriani modificati

Come esempio, consideriamo il caso di un moto centrale con potenziale $V(\rho)$. Mettendosi sul piano di Laplace e usando coordinate polari si ha la hamiltoniana

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} + V(\rho). \quad (361)$$

Oltre all'energia, dato che la variabile θ è ciclica, si conserva anche p_θ che non è altro che la componente J del momento angolare normale al piano di Laplace. Il sistema è completamente separabile, infatti possiamo scrivere per questo le equazioni (354):

$$p_\rho = \pm \sqrt{2m \left(E - V(\rho) - \frac{J^2}{2m\rho^2} \right)}, \quad p_\theta = J. \quad (362)$$

Si noti che θ non è qui la variabile angolare della coppia azione-angolo ma è la coordinata angolare sul piano dell'orbita fisica.

Se i valori di J e di E sono tali che entrambi i moti sono individualmente periodici, è immediato calcolare

$$A_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint J d\theta = J, \quad (363)$$

dove possiamo assumere che J sia positivo (scegliendo il verso dell'asse z in modo concorde). Si noti che sebbene ρ deve essere periodica per poter definire A_ρ , non è necessario che il suo periodo sia lo stesso di quello della variabile θ (o commensurabile ad esso). Usando la simmetria dell'orbita nello spazio delle fasi analogamente al caso unidimensionale, otteniamo

$$A_\rho = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \sqrt{2mE - 2mV(\rho) - J^2/\rho^2} d\rho, \quad (364)$$

dove ρ_- e ρ_+ sono i valori di ρ per i quali l'espressione sotto radice si annulla.

Per un potenziale kepleriano $V(\rho) = -\frac{\beta}{\rho}$ si hanno moti periodici quando $E < 0$ e $J^2 \neq 0$, in questo caso è possibile calcolare l'integrale (364) e si trova

$$A_\rho = -J + \sqrt{\frac{m\beta^2}{-2E}} \quad \rightarrow \quad E = -\frac{m\beta^2}{2(A_\rho + A_\theta)^2} \quad \rightarrow \quad \Omega_\rho = \Omega_\theta = \frac{m\beta^2}{(A_\rho + A_\theta)^3}, \quad (365)$$

dove per la seconda espressione si è tenuto conto che $J = A_\theta$. Si noti che $\Omega_\rho = \Omega_\theta$ implica che il sistema è globalmente periodico (le orbite fisiche sono chiuse).

È possibile calcolare l'energia in funzione delle variabili azione anche per $V(\rho) = -\frac{\beta}{\rho} + \frac{\gamma^2}{2m\rho^2}$. Per questo sistema si avrà $A_\theta = J$ e poi basterà definire $J' = \sqrt{J^2 + \gamma^2} = \sqrt{A_\theta^2 + \gamma^2}$ per ottenere

$$A_\rho = -J' + \sqrt{\frac{m\beta^2}{-2E}} \quad \rightarrow \quad E = -\frac{m\beta^2}{2(A_\rho + \sqrt{A_\theta^2 + \beta^2})^2} \quad \rightarrow \quad \Omega_\rho \neq \Omega_\theta. \quad (366)$$

Il sistema non è quindi globalmente periodico (le orbite fisiche *a rosetta* non sono in genere chiuse).

Esercizi svolti

- Si calcolino le variabili azione-angolo per il sistema con hamiltoniana

$$H = \frac{q_1^2 + p_1^2}{q_2^2 + p_2^2}$$

e si risolvano le relative equazioni di Hamilton.

Per questo sistema

$$\alpha_1 = \frac{q_1^2 + p_1^2}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2},$$

sono costanti del moto per cui

$$p_1 = \pm \sqrt{2\alpha_1 - q_1^2}, \quad p_2 = \pm \sqrt{2\alpha_2 - q_2^2}, \quad \rightarrow \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad (367)$$

dove per il calcolo delle azioni A_1 e A_2 è stata usata la (355). La hamiltoniana espressa nelle nuove variabili e le relative frequenze sono:

$$H' = \frac{A_1}{A_2} \quad \rightarrow \quad \Omega_1 = \frac{\partial H'}{\partial A_1} = \frac{1}{A_2}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial H'}{\partial A_2} = -\frac{A_1}{A_2^2}.$$

La funzione generatrice della trasformazione canonica è

$$F_2 = \int_0^{q_1} \sqrt{2A_1 - q^2} dq + \int_0^{q_2} \sqrt{2A_2 - q^2} dq, \quad (368)$$

e quindi

$$\phi_1 = \frac{\partial F_2}{\partial A_1} = \arcsin\left(\frac{q_1}{\sqrt{2A_1}}\right), \quad \phi_2 = \frac{\partial F_2}{\partial A_2} = \arcsin\left(\frac{q_2}{\sqrt{2A_2}}\right). \quad (369)$$

- Si calcolino le variabili azione-angolo per il sistema con hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{(q_2^2 + p_2^2) q_1^2}{4}$$

e si risolvano le relative equazioni di Hamilton.

Per questo sistema

$$\alpha_2 = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2}, \quad \alpha_1 = E = \frac{p_1^2}{2} + \alpha_2 \frac{q_1^2}{2},$$

sono costanti del moto per cui

$$p_1 = \pm \sqrt{2\alpha_1 - \alpha_2 q_1^2}, \quad p_2 = \pm \sqrt{2\alpha_2 - q_2^2}, \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}}, \quad A_2 = \alpha_2, \quad (370)$$

dove per il calcolo delle azioni A_1 e A_2 è stata usata la (355). La hamiltoniana espressa nelle nuove variabili e le relative frequenze sono:

$$H' = A_1 \sqrt{A_2} \quad \rightarrow \quad \Omega_1 = \frac{\partial H'}{\partial A_1} = \sqrt{A_2}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial H'}{\partial A_2} = \frac{A_1}{2\sqrt{A_2}},$$

dove sono state le inverse $\alpha_2 = A_2$, $\alpha_1 = A_1 \sqrt{A_2}$ delle uguaglianze in (370). La funzione generatrice della trasformazione canonica è

$$F_2 = \int_0^{q_1} \sqrt{2A_1 \sqrt{A_2} - A_2 q^2} dq + \int_0^{q_2} \sqrt{2A_2 - q^2} dq, \quad (371)$$

e quindi $\phi_1 = \frac{\partial F_2}{\partial A_1}$, $\phi_2 = \frac{\partial F_2}{\partial A_2}$ il cui calcolo esplicito può essere portato a termine (provare). Si noti che a differenza del modello del precedente esercizio, l'azione A_2 è in entrambe le funzioni integrande.

6.3 Gli invarianti adiabatici

Definizione

Consideriamo un sistema hamiltoniano $H(q, p, \lambda(t))$ dipendente dal tempo tramite il parametro $\lambda(t)$. Solo se $\lambda(t) = \lambda$ è costante, l'energia $E = H(q(t), p(t), \lambda)$ è un integrale del moto e quindi anch'essa costante. Se il parametro $\lambda(t)$ varia lentamente nel tempo ma si aspetta un tempo abbastanza lungo perché la sua variazione sia significativa ci si domanda se ci siano quantità che restano invece praticamente costanti. Questo non è il caso dell'energia

$$E(t) = H(q(t), p(t), \lambda(t))$$

che varia in modo significativo quando lo fa il parametro ma, come vedremo, è il caso dell'azione.

Dal punto di vista matematico è comodo assumere $\lambda = \lambda(\epsilon t)$ con $\epsilon > 0$ dove λ non varia lentamente in funzione del suo argomento ϵt ma varia lentamente rispetto a t se ϵ è "piccolo". In questo modo è possibile controllare la velocità di variazione di λ rispetto al tempo t tramite il parametro ϵ . Una definizione appropriata di invarianza è allora la seguente:

Una quantità fisica $\Psi(q(t), p(t), \lambda(\epsilon t))$ è un invariante adiabatico per il sistema di hamiltoniana $H(p, q, \lambda(\epsilon t))$ se esiste un τ positivo tale che per ogni moto del sistema

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Psi(q(t), p(t), \lambda(\epsilon t)) = \Psi(q(0), p(0), \lambda(0)) \quad (372)$$

in tutto l'intervallo $0 \leq t \leq \frac{\tau}{\epsilon}$. Si noti che il limite superiore di questo intervallo temporale è tale che ϵt può restare finito anche quando $\epsilon \rightarrow 0$ il che implica una variazione finita di λ .

L'esempio più noto e più studiato è l'azione $A(q(t), p(t), \lambda(\epsilon t))$, per la quale si può dimostrare l'invarianza adiabatica sotto la condizione che la frequenza $\Omega(q(t), p(t), \lambda(\epsilon t))$ rimanga finita e staccata da zero in tutto l'intervallo temporale $0 \leq t \leq \frac{\tau}{\epsilon}$ (per qualche τ). Si tenga presente che sia $A(q, p, \lambda)$ che $\Omega(q, p, \lambda)$ si calcolano a partire dalla hamiltoniana a λ fissato.

Non tratteremo qui il problema nella sua generalità, cercheremo piuttosto di farcene un'idea precisa tramite un esempio relativamente semplice. In particolare metteremo in risalto il differente comportamento dell'azione che sostanzialmente resta costante per $0 \leq t \leq \frac{\tau}{\epsilon}$ rispetto ad altre quantità (come l'energia) che hanno invece una variazione finita nello stesso intervallo temporale.

Invarianza dell'azione: il gas unidimensionale

Consideriamo un gas unidimensionale in una scatola, ossia un punto materiale che si muove liberamente tra 0 e L e rimbalza elasticamente invertendo la velocità quando ne urta le pareti in 0 o L . L'energia è $E = \frac{p^2}{2}$ (la massa sia unitaria) e quindi $p = \pm\sqrt{2E}$. Si calcola immediatamente l'azione (si veda l'esercizio precedentemente svolto in questo stesso capitolo): $A = \frac{|p|L}{\pi} = \frac{\sqrt{2EL}}{\pi}$ da cui derivano anche $E = \frac{p^2}{2} = \frac{\pi^2 A^2}{2L^2}$ e $\Omega = \frac{\pi^2 A}{L^2} = \frac{\pi|p|}{L}$.

Si consideri ora una scatola dove la parete di destra si muove lentamente nel tempo secondo la legge

$$L(\epsilon t) = L_0 + \epsilon t \quad (373)$$

con $\epsilon > 0$ (si notii che ϵ ha le dimensioni di una velocità). Il parametro $L(\epsilon t)$ gioca il ruolo di $\lambda(\epsilon t)$ usato per la definizione di invariante adiabatico. Si assuma che all'istante $t_0 = 0$ il punto sia in $x = L_0$ da dove esce con velocità negativa p_0 (si ricordi che la massa è unitaria, velocità e momento coincidono). Denominiamo con t_i i tempi dei successivi impatti sulla parete mobile. In conseguenza dell'elasticità degli urti, si avrà

$$|p_{i+1}| = |p_i| - 2\epsilon, \quad \rightarrow \quad |p_i| = |p_0| - 2i\epsilon, \quad (374)$$

dove le p_i sono le velocità (negative) di uscita dagli impatti agli istanti t_i sulla parete mobile. Includendo anche i tempi intermedi agli impatti, possiamo scrivere

$$|p(t)| = |p_i| = |p_0| - 2i\epsilon \quad \text{per } t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (375)$$

Questo significa che mentre $L(\epsilon t)$ cresce in modo lineare con il tempo, $|p(t)|$ rimane costante tra due impatti e fa un salto negativo di valore costante soltanto quando tocca la parete mobile.

Dato che la lunghezza della scatola cresce come $L(\epsilon t) = L_0 + \epsilon t$, si avrà che al momento degli impatti la lunghezza della scatola è $L_i = L_0 + \epsilon t_i$. Infine, tenendo presente che il modulo della velocità tra gli impatti i e $i + 1$ è $|p_i|$ e che il percorso totale da fare nel tempo tra i due impatti è $\Lambda_i = L_{i+1} + L_i$, si ha quindi

$$\Delta t_i = \frac{\Lambda_i}{|p_i|}, \quad (376)$$

dove $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Consideriamo ora l'intervallo temporale

$$0 \leq t \leq \frac{\tau}{\epsilon} \quad (377)$$

e scegliamo $\tau = \frac{L_0}{2}$ (quindi τ ha le dimensioni di uno spazio. Con questa scelta avremo $L_0 \leq L(\epsilon t) \leq L(\tau) = \frac{3}{2}L_0$. Se chiamiamo t_n il tempo dell'ultimo contatto con la parete mobile nell'intervallo temporale (377) e t_{n+1} il tempo dell'impatto immediatamente successivo, avremo anche

$$t_n \leq \frac{\tau}{\epsilon} = \frac{L_0}{2\epsilon} < t_{n+1}. \quad (378)$$

Si noti che la seconda disuguaglianza è stretta.

Il numero di cicli completi che avvengono in questo tempo t_n (ciclo completo = andata e ritorno dalla parete mobile) è quindi n più eventualmente un ciclo parziale se t_n è strettamente minore di $\frac{\tau}{\epsilon}$. Dato che Λ_i è crescente mentre $|p_i|$ è decrescente si ha dalla (376)

$$\Delta t_i \geq \frac{\Lambda_0}{|p_0|} > \frac{2L_0}{|p_0|} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau}{\epsilon} \geq t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i > n \frac{2L_0}{|p_0|} \quad \rightarrow \quad n < \frac{|p_0|\tau}{2L_0\epsilon} = \frac{|p_0|}{4\epsilon}. \quad (379)$$

L'ultima disuguaglianza a destra ci dice che il numero totale n di cicli è al più di ordine $\frac{1}{\epsilon}$ e implica che

$$|p_n| = |p_0| - 2n\epsilon > \frac{|p_0|}{2}. \quad (380)$$

Si è detto in precedenza che l'azione è un invariante adiabatico se la frequenza rimane finita e staccata da zero nell'intervallo temporale (377), verifichiamo ora che questo è vero. Tenendo presente la (375) e la (380) si ha per $t \in [0, \frac{\tau}{\epsilon}]$

$$|p_0| \geq |p(t)| \geq |p_n| > \frac{|p_0|}{2}, \quad (381)$$

dove per la seconda disuguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $|p(t)|$ è decrescente e anche il fatto che $p(t)$ dopo l'ultimo salto rimane invariato fino al tempo $\frac{\tau}{\epsilon}$. Inoltre, come abbiamo già visto, si ha anche anche

$$L_0 \leq L(\epsilon t) \leq \frac{3}{2}L_0, \quad (382)$$

per cui troviamo

$$\Omega(q(t), p(t), L(\epsilon t)) = \frac{\pi|p(t)|}{L(\epsilon t)} \geq \frac{\pi|p_n|}{L(\tau)} > \frac{\pi|p_0|}{3L_0}, \quad (383)$$

e anche

$$\Omega(q(t), p(t), L(\epsilon t)) = \frac{\pi|p(t)|}{L(\epsilon t)} \leq \frac{\pi|p_0|}{L_0}. \quad (384)$$

Come si voleva dimostrare, $\Omega(t)$ rimane finita e staccata da zero in tutto l'intervallo temporale (377) cosicché le condizioni per l'invarianza adiabatica dell'azione sono soddisfatte.

È istruttivo verificare direttamente che l'azione è in effetti un invariante adiabatico. Osserviamo preliminarmente che per $t \in [t_i, t_{i+1})$, con $i = 1, \dots, n$, si ha

$$A(q(t), p(t), L(\epsilon t)) = \frac{|p(t)|L(\epsilon t)}{\pi} = \frac{|p_i|(L_i + \epsilon(t - t_i))}{\pi} = A_i + \epsilon \frac{|p_i|(t - t_i)}{\pi}, \quad (385)$$

dove si sono usate le uguaglianze $L(\epsilon t) = L_0 + \epsilon t$ e $L_i = L_0 + \epsilon t_i$ e dove

$$A_i = A(q(t_i), p(t_i), L(\epsilon t_i)) = \frac{|p_i|L_i}{\pi} \quad (386)$$

è l'azione calcolata al tempo dell'iesimo impatto. La variazione dell'azione $A(q(t), p(t), L(\epsilon t)) - A_i$ in un ciclo incompleto è quindi positiva e di ordine ϵ .

Si ha inoltre $L_{i+1} = L_i + \epsilon \Delta t_i$, per cui dalla (376) si ottiene immediatamente la prima delle equazioni qui sotto, che implica la seconda e poi la terza

$$|p_i|\Delta t_i = 2L_i + \epsilon \Delta t_i \quad \rightarrow \quad \Delta t_i = \frac{2L_i}{|p_i| - \epsilon} \quad \rightarrow \quad L_{i+1} = L_i + \epsilon \Delta t_i = L_i \left(1 + \frac{2\epsilon}{|p_i| - \epsilon}\right), \quad (387)$$

da quest'ultima e dalla (374) si ottiene anche

$$A_{i+1} = \frac{|p_{i+1}|L_{i+1}}{\pi} = A_i \left(1 - \frac{2\epsilon}{|p_i|}\right) \left(1 + \frac{2\epsilon}{|p_i| - \epsilon}\right) = A_i \left(1 - \frac{2\epsilon^2}{|p_i|(|p_i| - \epsilon)}\right). \quad (388)$$

Si noti, che il risultato qui sopra mostra chiaramente che la variazione dell'azione in un ciclo completo è negativa ed è di ordine ϵ^2 . Inoltre, dato che $i \leq n \leq \frac{|p_0|}{4\epsilon}$, la variazione $A_i - A_0$ dell'azione per un numero i di cicli completi sarà al più di ordine ϵ .

Per $t \in [t_i, t_{i+1})$ possiamo quindi scrivere

$$|A(q(t), p(t), L(\epsilon t)) - A_0| \leq |(A(q(t), p(t), L(\epsilon t)) - A_i) + |A_i - A_0| \quad (389)$$

dove entrambi i termini a destra della disuguaglianza sono di ordine ϵ (come esercizio si renda completamente rigorosa questa affermazione). Infine, dato che $A_0 = A(q(0), p(0), \lambda(0))$, abbiamo dimostrato che esiste un τ per il quale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(q(t), p(t), \lambda(\epsilon t)) = A(q(0), p(0), \lambda(0)) \quad (390)$$

in tutto l'intervallo $0 \leq t \leq \frac{\tau}{\epsilon}$ e quindi che l'azione è un invariante adiabatico.

Dovrebbe essere chiaro a questo punto che l'invarianza dell'azione dipende da due fattori: (A) la sua variazione in un ciclo completo è di ordine ϵ^2 , (B) il numero di cicli è di ordine $\frac{1}{\epsilon}$. Abbiamo anche visto che il numero di cicli è di ordine $\frac{1}{\epsilon}$ se il periodo di ogni ciclo resta finito e strettamente positivo nell'intervallo $0 \leq t \leq \frac{L_0}{2\epsilon}$ (quindi la frequenza, che è l'inverso del periodo, deve soddisfare la stessa proprietà). Da un punto di vista pratico, la chiave per provare che una variabile Ψ è un invariante adiabatico per un moto periodico è quindi mostrare che la sua variazione in un ciclo è di ordine ϵ^2 e che la durata di ogni ciclo resta finita e staccata da zero per ogni $t \leq \frac{\tau}{\epsilon}$ e per una qualche scelta di τ .

Si noti che al contrario dell'azione l'energia del gas unidimensionale non è un invariante adiabatico, infatti la sua variazione in un ciclo completo è

$$E_i - E_{i+1} = \frac{p_i^2}{2} - \frac{p_{i+1}^2}{2} = 2\epsilon|p_i| - 2\epsilon^2, \quad (391)$$

quindi una variazione di ordine ϵ e non di ordine ϵ^2 come per l'azione. Vedremo come esercizio che anche l'azione e l'energia di un oscillatore armonico mantengono questa differenza per gli ordini di grandezza delle variazioni in un ciclo completo per cui solo l'azione è un invariante adiabatico.

Esercizi svolti

- Si mostri che la variabile azione del sistema con hamiltoniana $H = \lambda(\epsilon t)(\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2})$ con $\lambda(\epsilon t) = 1 + \epsilon t$ è un invariante adiabatico (in realtà non dipende esplicitamente da $\lambda(t)$ ed una costante del moto). Si mostri inoltre che la variazione dell'energia in un tempo $\frac{\tau}{\epsilon}$ è uguale a $\tau\alpha$ e che quindi questa non è un invariante adiabatico.

Per λ fissato si ha $A = E/\lambda \rightarrow E = A\lambda \rightarrow \Omega = \lambda$ e quindi la frequenza come funzione del tempo è $\Omega(t) = 1 + \epsilon t$ che rimane finita e staccata da zero per qualsiasi scelta di τ dato che $1 \leq \Omega(t) \leq 1 + \tau$. Questo da solo basta ad assicurare che l'azione è un invariante adiabatico, tuttavia mostrarne esplicitamente l'invarianza è estremamente semplice.

Sappiamo che per questa hamiltoniana la quantità $\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ è una costante del moto, possiamo quindi porre $\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} = \alpha$. D'altra parte abbiamo già mostrato che $A = E/\lambda = \alpha$. L'azione è quindi una costante del moto, il che implica banalmente che è un invariante adiabatico. L'energia non è invece un invariante adiabatico, si ha infatti $E(t) = (1 + \epsilon t)\alpha$ e quindi la variazione dell'energia nel tempo che va da 0 a τ/ϵ è $\tau\alpha$.

- Si consideri la hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2} + \lambda(\epsilon t)\frac{q^2}{2}$ con $\lambda(\epsilon t) = 1 + \epsilon t$ e si mostri che l'azione è un invariante adiabatico al contrario dell'energia.

Per λ fissato si ha $A = E/\sqrt{\lambda} \rightarrow E = A\sqrt{\lambda} \rightarrow \Omega = \sqrt{\lambda}$ e quindi la frequenza come funzione del tempo è $\Omega(t) = \sqrt{1 + \epsilon t}$ che rimane finita e staccata da zero per qualsiasi scelta di τ dato che $1 \leq \Omega(t) \leq \sqrt{1 + \tau}$. Questo da solo basta ad assicurare che l'azione è un invariante adiabatico, mostriamone tuttavia esplicitamente l'invarianza come esercizio.

Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{p}(t) = -(1 + \epsilon t)q(t), \quad \dot{q}(t) = p(t), \quad (392)$$

si ha quindi

$$A(t) = \frac{E(t)}{\sqrt{\lambda(\epsilon t)}} = \frac{p^2(t) + (1 + \epsilon t)q^2(t)}{2(1 + \epsilon t)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rightarrow \quad \dot{A}(t) = \epsilon \frac{(1 + \epsilon t)q^2(t) - p^2(t)}{4(1 + \epsilon t)^{\frac{3}{2}}}, \quad (393)$$

$$E(t) = \frac{p^2(t) + (1 + \epsilon t)q^2(t)}{2} \quad \rightarrow \quad \dot{E}(t) = \epsilon \frac{q^2(t)}{2}, \quad (394)$$

dove per le uguaglianze a destra abbiamo usato le equazioni di Hamilton (392).

Senza perdere di generalità consideriamo un ciclo che inizia all'istante \hat{t} dove $q(\hat{t}) = 0$ e $p(\hat{t}) > 0$ e che finisce all'istante $\hat{t} + T$ dove $q(\hat{t} + T) = 0$ e $p(\hat{t} + T) > 0$. La variazione dell'azione e quella dell'energia in questo ciclo sono:

$$\Delta A(\hat{t}) = \epsilon \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+T} \frac{(1 + \epsilon t)q^2(t) - p^2(t)}{4(1 + \epsilon t)^{\frac{3}{2}}} dt, \quad \Delta E(\hat{t}) = \epsilon \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+T} \frac{q^2(t)}{2} dt. \quad (395)$$

Se limitatamente all'intervallo temporale $\hat{t} \leq t \leq \hat{t} + T$ sostituiamo nelle equazioni di Hamilton ϵt con $\epsilon \hat{t}$, ossia congeliamo l'evoluzione del parametro $\lambda(\epsilon t)$ al valore che ha all'istante \hat{t} in cui il ciclo inizia, facciamo un errore di ordine ϵ , si ha infatti $\lambda(\epsilon t) - \lambda(\epsilon \hat{t}) = \epsilon(t - \hat{t}) \leq \epsilon T$. Le equazioni di Hamilton approssimate sono

$$\dot{\hat{p}}(t) = -(1 + \epsilon \hat{t})\hat{q}(t), \quad \dot{\hat{q}}(t) = \hat{p}(t), \quad (396)$$

la cui soluzione $\hat{q}(t)$, $\hat{p}(t)$ nel ciclo differisce da quella esatta $q(t)$, $p(t)$ per qualche cosa di ordine ϵ (si tenga presente che invece $\epsilon \hat{t}$ non è piccolo, ossia non è di ordine ϵ , perché $\hat{t} \in [0, \tau/\epsilon]$). Troviamo così facilmente la soluzione

$$\hat{q}(t) = \frac{p(\hat{t})}{\hat{\Omega}} \sin(\hat{\Omega}(t - \hat{t})), \quad \hat{p}(t) = p(\hat{t}) \cos(\hat{\Omega}(t - \hat{t})) \quad (397)$$

dove $\hat{\Omega} = \sqrt{1 + \epsilon \hat{t}}$. Si noti che all'istante \hat{t} le soluzioni esatte e quelle approssimate coincidono, ossia $\hat{q}(\hat{t}) = q(\hat{t}) = 0$ e $\hat{p}(\hat{t}) = p(\hat{t})$. Il periodo di un ciclo 'vero' T è circa uguale al periodo del ciclo approssimato \hat{T} , ossia si ha $T \simeq 2\pi/\hat{\Omega} = 2\pi/\sqrt{1 + \epsilon \hat{t}} = \hat{T}$, dove l'uguaglianza approssimata si intende valida a meno di un termine di ordine ϵ .

Si noti che i periodi rimangono finiti e strettamente positivi per qualsiasi scelta di τ per cui il numero di cicli è necessariamente di ordine $1/\epsilon$.

In conclusione, sia per gli argomenti negli integrali nella (395) che per il periodo T sul quale gli integrali vengono eseguiti l'errore di approssimazione che abbiamo fatto è al più di ordine ϵ per cui dalla (395) si ha:

$$\Delta A(\hat{t}) = \epsilon \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \hat{T}} \frac{(1 + \epsilon \hat{t})\hat{q}^2(t) - \hat{p}^2(t)}{4(1 + \epsilon \hat{t})^{\frac{3}{2}}} dt + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \Delta E(\hat{t}) = \epsilon \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \hat{T}} \frac{\hat{q}^2(t)}{2} dt + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (398)$$

Gli integrali qui sopra si possono eseguire esplicitamente usando le (397), il primo è uguale a zero e quindi la variazione dell'azione su un ciclo è al più di ordine ϵ^2 , il secondo è invece strettamente positivo per cui la variazione dell'energia è di ordine ϵ . Dato che il numero di cicli è di ordine $1/\epsilon$ risulta evidente che l'azione è un invariante adiabatico al contrario dell'energia.

Si tenga ben presente che tutta questa trattazione, sebbene corretta, non è altrettanto rigorosa di quella del gas unidimensionale perché non abbiamo né una stima esatta del numero di cicli nell'intervallo di tempo $t \in [0, \frac{\tau}{\epsilon}]$ né una stima esatta dell'errore di approssimazione degli integrali in (395).

6.4 Teorema di Liouville e teorema di ricorrenza di Poincaré

Invarianza dei volumi nello spazio delle fasi: teorema di Liouville

Per semplicità di notazione in questo paragrafo consideriamo un sistema descritto dalla sola coppia di variabili q e p , l'estensione al caso in cui il numero di coppie n è maggiore di uno è semplicissima ma pesante in termini di notazioni.

Sia A_t un sottoinsieme misurabile dello spazio delle fasi Γ ($A_t \subset \Gamma$), la sua misura di Lebesgue (volume) è data dall'integrale

$$\mu(A_t) = \int_{A_t} dqdp. \quad (399)$$



Figura 18. Joseph Liouville (Saint-Omer, 24 marzo 1809 – Parigi, 8 settembre 1882) è stato un matematico e ingegnere francese. Ha pubblicato in diversi ambiti, tra cui la teoria dei numeri, l'analisi complessa, la geometria differenziale, la fisica matematica, la topologia e persino l'astronomia. In meccanica ha introdotto le variabili azione-angolo ed è ricordato soprattutto per l'omonimo teorema.

Sia A_{t+h} il suo evoluto hamiltoniano al tempo $t+h$. Questo significa che se A_t contiene il punto q, p allora A_{t+h} contiene il punto Q, P definito come $Q = Q(t+h; q, p, t)$, $P = P(t+h; q, p, t)$ che rappresenta la posizione all'istante $t+h$ di un sistema che all'istante t era in q, p . In altre parole $Q(t+h; q, p, t)$, $P(t+h; q, p, t)$ è la soluzione all'istante $t+h$ delle equazioni di Hamilton con dato iniziale q, p all'istante t . Il volume di A_{t+h} , per definizione è dato dalla prima uguaglianza qui sotto

$$\mu(A_{t+h}) = \int_{A_{t+h}} dQdP = \int_{A_t} |\det \hat{J}(h)| dqdp, \quad (400)$$

mentre la seconda uguaglianza si ottiene considerando $Q = Q(t+h; q, p, t)$ e $P = P(t+h; q, p, t)$ come un cambiamento di variabile, per cui $\det \hat{J}(h)$ è lo jacobiano di

$$\hat{J}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad (401)$$

che è la matrice jacobiana della trasformazione $q, p \rightarrow Q, P$.

Consideriamo adesso l'evoluzione hamiltoniana per un breve lasso di tempo, ossia supponiamo che h sia piccolo (ci interesserà il limite $h \rightarrow 0$). La soluzione delle equazioni di Hamilton è a sinistra nella formula qui sotto, dove le derivate della hamiltoniana (che può dipendere esplicitamente dal tempo) sono calcolate in q, p e t e dove $\mathcal{O}(h^2)$ significa "quantità di ordine h^2 ",

$$\begin{cases} Q = q + \frac{\partial H}{\partial p} h + \mathcal{O}(h^2) \\ P = p - \frac{\partial H}{\partial q} h + \mathcal{O}(h^2) \end{cases} \rightarrow \hat{J}(h) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} h & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} h \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} h & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} h \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^2). \quad (402)$$

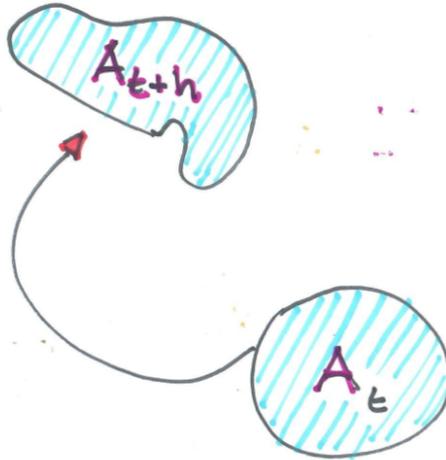


Figura 19. La misura di Lebesgue (il volume) di un sottoinsieme dello spazio delle fasi Γ resta costante nel tempo per i moti hamiltoniani. Questo significa che per qualsiasi h e t si ha $\mu(A_{t+h}) = \mu(A_t)$, ossia il volume del sottoinsieme A_t e quello del suo evoluto A_{t+h} (disegnati qui sopra) sono uguali.

L'espressione a destra qui sopra segue dalle soluzioni e naturalmente $\mathcal{O}(h^2)$ significa qui "matrice i cui elementi sono di ordine h^2 ". È facile verificare che il determinante di $\hat{J}(h)$ soddisfa l'uguaglianza

$$|\det \hat{J}(h)| = 1 + \mathcal{O}(h^2). \quad (403)$$

Si noti che il fatto che i termini di ordine h scompaiono è dovuto alla particolare struttura delle equazioni di Hamilton. Infine, la (403), insieme alle (399) e (400), implica la prima uguaglianza qui sotto che a sua volta implica la seconda

$$\mu(A_{t+h}) = \mu(A_t) + \mathcal{O}(h^2) \quad \rightarrow \quad \frac{d\mu(A_t)}{dt} = 0. \quad (404)$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema di Liouville, che afferma che per i moti hamiltoniani la misura di Lebesgue $\mu(A_t)$ resta costante nel tempo.

Esercizi

- Si trovino le soluzioni $Q = Q(t; q, p)$, $P = P(t; q, p)$ per un oscillatore armonico di equazioni $\dot{Q} = P$, $\dot{P} = -Q$ (quindi $H = \frac{Q^2 + P^2}{2}$) con dato iniziale $Q(0) = q$, $P(0) = p$. Si mostri esplicitamente che lo jacobiano $\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$ è uguale a 1.
- Si ripeta l'esercizio per un punto materiale libero di equazioni $\dot{Q} = P$, $\dot{P} = 0$ con dato iniziale $Q(0) = q$, $P(0) = p$.
- Si ripeta l'esercizio per un punto materiale con hamiltoniana $H = \mu(t) \frac{Q^2 + P^2}{2}$ e quindi con equazioni $\dot{Q} = \mu(t)P$, $\dot{P} = -\mu(t)Q$ e con dato iniziale $Q(0) = q$, $P(0) = p$.
- Si considerino le equazioni $\dot{Q} = Q$, $\dot{P} = \lambda P$ con dato iniziale $Q(0) = q$, $P(0) = p$. Si mostri che lo jacobiano è uguale a 1 solo quando $\lambda = -1$ e se ne spieghi il motivo.

Teorema di ricorrenza di Poincaré come importante conseguenza del teorema di Liouville

Esistono molte formulazioni del teorema di Poincaré, nella forma che diamo qui il significato fisico è molto trasparente. L'enunciato è il seguente:

Si consideri un sistema hamiltoniano isolato che evolve in uno spazio delle fasi di volume finito Γ e sia A un qualsiasi sottoinsieme di misura non nulla di Γ . Allora quasi tutti i sistemi con dato iniziale in A tornano in A in un tempo finito.

Bisogna fare due precisazioni. La prima è che "quasi tutti" va inteso nel senso della teoria della misura, quindi tutti a meno di un insieme di misura nulla, il che per un fisico significa proprio tutti. Poi bisogna dire che il fatto che lo spazio delle fasi sia di volume finito Γ è la situazione tipica, si pensi a un gas di punti materiali in una scatola. La posizione fisica di ogni punto è limitata dalla scatola stessa, mentre il modulo della quantità di moto di ogni punto si conserva (gli urti sulle pareti della scatola sono elastici). Quindi la posizione del sistema nello spazio delle fasi (che è costituita posizioni fisiche e le quantità di moto di ciascun punto) è limitata a un volume finito. Un altro esempio è la nostra galassia (se la consideriamo un sistema isolato).



Figura 20. Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico e un fisico teorico francese, che si è occupato anche di struttura e metodi della scienza. Poincaré viene considerato un enciclopedico e in matematica l'ultimo universalista. I suoi studi sul problema dei tre corpi hanno anticipato la teoria del caos, affermatasi quasi cento anni dopo.

La dimostrazione del teorema è molto semplice. Consideriamo una serie di tempi discreti $t_n = n\tau$ e (per assurdo) ipotizziamo che esista un insieme di misura finita $B_0 \subset A$ i cui punti non tornano mai in A . In simboli: $B_n \cap A = \emptyset$ per ogni $n \geq 1$ dove $B_n = S^n(B_0)$ è l'evoluto al tempo t_n di B_0 . Se questo è vero a maggior ragione deve essere vero che $B_n \cap B_0 = \emptyset$ per ogni $n \geq 1$. Se poi facciamo evolvere l'insieme vuoto $B_n \cap B_0$ per m passi temporali abbiamo necessariamente $S^m(B_n \cap B_0) = \emptyset$, d'altra parte $S^m(B_n \cap B_0) = S^m(B_n) \cap S^m(B_0) = B_{m+n} \cap B_m$. In definitiva $B_{m+n} \cap B_m = \emptyset$ per ogni m e per ogni $n \geq 1$, quindi gli insiemi B_n sono tutti disgiunti.

Se indichiamo con μ il volume di un insieme e con $\cup_{l=1}^n B_l$ l'unione di tutti gli insiemi fino al

passo n , avremo

$$\mu \left[\bigcup_{l=1}^n B_l \right] = \sum_{l=1}^n \mu[B_l] = n\mu[B_0], \quad (405)$$

dove per la prima uguaglianza si è usato il fatto che gli insiemi sono tutti disgiunti e per la seconda si è usata la conservazione dei volumi per i sistemi hamiltoniani (teorema di Liouville). Ma questo genera una contraddizione, infatti esisterà un \bar{n} per il quale

$$\mu \left[\bigcup_{l=1}^{\bar{n}} B_l \right] = \bar{n}\mu[B_0] > \mu[\Gamma], \quad (406)$$

il che naturalmente è impossibile. Quindi se esiste un insieme B_0 di punti di A che non tornano mai in A questo deve avere misura nulla, il teorema è quindi dimostrato.

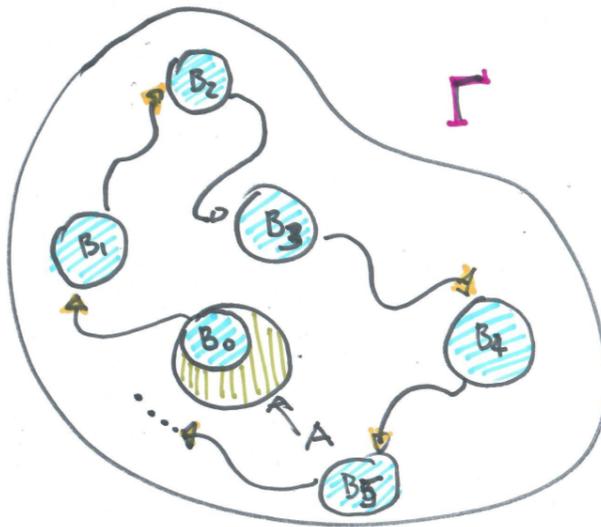


Figura 21. Lo spazio delle fasi Γ è finito. I volumi (finiti) di tutti gli insiemi B_n che rappresentano l'evoluzione ai tempi $t_n = n\tau$ di B_0 sono uguali per cui non possono essere per sempre disgiunti. Ma se due di essi non sono disgiunti, diciamo B_m e B_{m+n} non lo sono neanche B_0 e B_n . Quindi non esiste un insieme B_0 di A i cui punti non tornano mai in B_0 e quindi in A .

Naturalmente se il sistema torna in A in un tempo finito, possiamo ripetere l'argomento e quindi affermare che ogni sistema torna infinite volte in prossimità del suo dato iniziale.

Questo è ovviamente in contrasto con l'esperienza e la termodinamica. Consideriamo ancora un gas in una scatola, se inizialmente era tutto in una metà di essa, separata dall'altra metà da una parete, dopo la rimozione della parete si espanderà in tutta la scatola. Il teorema ci dice tuttavia che dopo un certo tempo dovrà necessariamente tornare nella piccola regione della scatola da dove era partito. E non solo, anche tutte le singole velocità e posizioni dei punti saranno prossime a quelle iniziali. Questo apparente paradosso, che sembra evidenziare una inconciliabilità tra meccanica e termodinamica, può essere spiegato dal seguente esempio.

Immaginiamo due cani che vanno a zonzo appaiati condividendo un numero totale N di pulci che passano liberamente dall'uno all'altro. Il bassotto a un certo istante t trasporta $n(t)$ pulci mentre il barboncino ovviamente ne trasporta $N - n(t)$. Ogni secondo tutte le pulci saltano atterrando ciascuna con la medesima probabilità $\frac{1}{2}$ su uno dei due cani indipendentemente dal cane che la ospitava.

È chiaro che le pulci che sono inizialmente tutte sul bassotto ($n(0) = N$), dopo un solo secondo (già al primo salto) saranno più o meno equamente distribuite sui due cani. Perché ritornino tutte sul bassotto si dovrà però aspettare un tempo di ordine di 2^N secondi (si veda l'appendice). Ad esempio, se le pulci sono cento, basterà un secondo perché si distribuiscano equamente sui due cani, ma provate a convertire in anni i 2^{100} secondi necessari perché ritornino tutte sul bassotto!

La soluzione del paradosso è quindi semplice, se $N = 6 \cdot 10^{23}$ (il numero di Avogadro, quello rilevante in termodinamica) non c'è nessuna speranza di vedere il teorema di Poincaré in azione perché i tempi di ritorno eccedono di gran lunga l'età dell'universo.

Torniamo al gas, se il numero di molecole è dell'ordine del numero di Avogadro (termodinamica) vedremo l'espansione in tutta la scatola ma non vivremo abbastanza per vederlo tornare nella metà iniziale. Tuttavia questo sarà possibile se le molecole che lo compongono sono poche (meccanica).

Il modello degli Ehrenfest semplificato (per il modello originario si veda [7])

Abbiamo ipotizzato che ogni secondo tutte le pulci saltano atterrando ciascuna con la medesima probabilità $\frac{1}{2}$ su uno dei due cani indipendentemente dal cane che la ospitava, quindi le $n(t)$ sono tutte variabili aleatorie indipendenti per $t \geq 1$. Anche se inizialmente tutte le pulci sono sul bassotto ($n(0) = N$), già dopo il primo salto e poi dopo tutti quelli successivi, si distribuiscono sui due cani secondo una binomiale di parametro $1/2$. La probabilità che $n(t) = n$ è quindi

$$\rho_N(n) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (407)$$

Si noti che $\rho_N(n)$ non è altro che il rapporto tra il numero $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ di stati corrispondenti a una configurazione con n pulci sul bassotto e $N-n$ sul barboncino diviso il numero totale 2^N degli stati.

Il valore atteso di $n(t)$ per $t \geq 1$ è sicuramente $\frac{N}{2}$ vista la simmetria della distribuzione rispetto a questo valore. Un semplice calcolo ci conferma infatti che

$$E[n(t)] = \sum_{n=0}^N n \rho_N(n) = \frac{N}{2}. \quad (408)$$

La varianza σ_N^2 può essere anch'essa facilmente calcolata:

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=0}^N \left(n - \frac{N}{2} \right)^2 \rho_N(n) = \frac{N}{4}. \quad (409)$$

In definitiva

$$n(t) = \frac{N}{2} \pm \frac{\sqrt{N}}{2} \quad (410)$$

per ogni $t \geq 1$, il che significa una condivisione delle pulci sostanzialmente paritaria tra i due cani che viene raggiunta in un solo secondo. Ad esempio se $N = 100$ avremo $n(t) = 50 \pm 5$.

Calcoliamo ora il tempo tipico T necessario affinché le pulci, che erano inizialmente tutte sul bassotto, tornino tutte su di esso. La probabilità che il ritorno avvenga dopo S secondi è

$$p_N(S) = \frac{1}{2^N} \left(1 - \frac{1}{2^N} \right)^{S-1}, \quad (411)$$

con $S = 1, 2, \dots$. Questa probabilità si ottiene dal prodotto tra $\left(1 - \frac{1}{2^N} \right)^{S-1}$ che è la probabilità che nei primi $S-1$ secondi non si sia verificato l'evento "tutte le pulci sul bassotto" e $\frac{1}{2^N}$ che è la

probabilità che al tempo S si sia verificato l'evento "tutte le pulci sul bassotto". Il tempo medio di ritorno è quindi

$$T = \sum_{S=1}^{\infty} S p_N(S) = 2^N, \quad (412)$$

che, come abbiamo visto, è già enorme se $N = 100$, figuriamoci se N è dell'ordine di $6 \cdot 10^{23}$.

Per finire si mostri come esercizio che le probabilità (407) e (411) hanno normalizzazione unitaria. Suggerimento: si usino

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} a^n b^{N-n}, \quad \sum_{S=0}^{\infty} a^S = \frac{1}{1-a}, \quad (413)$$

Si calcolino anche le medie (408) e (412) e la varianza (409) sempre a partire dalle due uguaglianze qui sopra e dalle derivate prime e seconde rispetto ad a di queste.



Bibliografia

- [1] L. D. Landau e E. M. Lifšits, *Meccanica*. Editori Riuniti, University Press, 2009.
- [2] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [3] E. Olivieri, *Appunti di Meccanica Razionale*. Aracne, 1992.
- [4] R. Esposito, *Appunti dalle lezioni di Meccanica Razionale*. Aracne, 1998.
- [5] L. Benfatto, R. Raimondi e E. Scoppola, *Meccanica Hamiltoniana*. Roma 3, 2006-2007.
- [6] G. Benettin, *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*. Università di Padova, 2014-2015.
- [7] A. Vulpiani *Meccanica Statistica del Non Equilibrio*. Università di Roma 1, 2017-2018.