Meccanica Classica e Analitica
Corso di Laurea Triennale in Fisica - A.A. 2023/24
(2° anno, 2° semestre, 6 CFU)
Docente: Maurizio Serva

"Io fingo o suppongo che qualche corpo o punto si muova all'ingiù e all'insù con la nota proporzione et horizzontalmente con moto equabile. Quando questo sia io dico che seguirà tutto quello che ha detto il Galileo, et io ancora. Se poi le palle di piombo, di ferro, di pietra non osservano quella supposta proporzione, suo danno, noi diremo che non parliamo di esse." - Evangelista Torricelli (1608-1647)

Programma - Primo modulo

- Parte I - Sistemi vincolati ed equazioni di Lagrange.

  Definizione e classificazione dei vincoli. Equazioni del moto in presenza di vincoli lisci, olonomi e bilateri. Velocità virtuali: definizione di vincolo ideale o perfetto. Moti naturali e principio di D'Alembert. Derivazione delle equazioni di Lagrange. Il caso conservativo e la lagrangiana (vincoli fissi e mobili). Integrali primi: energia generalizzata, momenti cinetici coniugati a variabili cicliche. Espressione esplicita della lagrangiana e coincidenza di energia generalizzata e energia meccanica in caso di vincoli fissi. Separazione delle variabili. Il problema dei due corpi. Trasformazioni naturali $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t)$. Invarianza delle equazioni per l'aggiunta alla lagrangiana di una qualsiasi derivata totale $\frac{dF}{dt}(\mathbf{q}, t)$. Simmetrie per un sistema lagrangiano, teorema di Nöther.

- Parte II - Piccole oscillazioni dei sistemi lagrangiani.

  Equazioni di Lagrange in forma normale del primo ordine. Equilibrio, stabilità, teorema di Lyapunov e teorema di Dirichlet-Lagrange. Approssimazione quadratica della lagrangiana nell'intorno di un equilibrio stabile con matrice hessiana $\hat{V}$ del potenziale definita positiva: lagrangiana ridotta in termini di $\hat{V}$ e della matrice dell'energia cinetica $\hat{T}$. Conseguente linearizzazione delle equazioni di Lagrange. Soluzione delle equazioni di Lagrange nel caso in cui sia $\hat{T}$ che $\hat{V}$ sono diagonali. Il caso non diagonale: pulsazioni proprie e autovettori ortogonali nella metrica $\hat{T}$. Soluzione generale ed esempi vari.

- Parte III - Princìpi variazionali.

  Il problema del bagnino (rifrazione). Spazi delle traiettorie e funzionali. Punto stazionario di un funzionale. Funzionale d'azione e condizione di stazionarietà: equazioni di Eulero-Lagrange. Stazionarietà dell'azione e non unicità della lagrangiana. Principi variazionali in ambiti diversi dalla meccanica. Geodetiche su superfici: piano, paraboloide, iperboloide, superficie generata dalla traslazione di una parabola, cilindro. Brachistocrone sul piano dove è definito un campo di velocità scalare $v = v(x, y)$. Il caso in cui la velocità dipende da una sola variabile: $v = v(y)$. Soluzione completa per il caso lineare ($v = y$) e per la brachistocrona classica ($v = \sqrt{2gy}$).

Programma - Secondo modulo

- Parte IV - Sistemi hamiltoniani.

  Derivazione delle equazioni di Hamilton dalle equazioni di Lagrange. Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton in assenza di vincoli e altri esempi con e senza dipendenza esplicita dal tempo. Definizione di parentesi di Poisson e parentesi di Poisson fondamentali. Integrali primi e parentesi di Poisson. Hamiltoniana come energia generalizzata del sistema, condizioni per la sua conservazione. Conservazione dei momenti cinetici coniugati alle variabili cicliche. Proprietà delle parentesi di Poisson. Identità di Jacobi ed eventuali ulteriori integrali primi. Hamiltoniane $H(q_1, p_1, .. q_l, p_l, g(q_{l+1}, p_{l+1}, .., q_n, p_n), t)$ che ammettono separazione di variabili e relativi integrali primi. Completa separabilità.

- Parte V - Trasformazioni canoniche.

  Definizione di trasformazione canonica e completamente canonica, esempi e controesempi. Invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali come condizione necessaria e sufficiente per la completa canonicità di una trasformazione indipendente dal tempo (con dimostrazione), esempi e controesempi. Lagrangiana $\Lambda(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = p\dot{q} - H(q, p, t)$ con relative equazioni identiche alle equazioni di Hamilton. Trasformazioni che conservano l'identità tra equazioni di Lagrange e di Hamilton: criterio sufficiente per la canonicità basato sul confronto tra due forme differenziali (con dimostrazione). Funzioni generatrici delle trasformazioni canoniche, esempi vari. Il caso delle trasformazioni naturali.

- Parte VI - Approfondimenti sui sistemi hamiltoniani.

  Moti periodici: librazioni e rotazioni. Definizione delle variabili azione-angolo per i moti periodici di sistemi a un grado di libertà. Energia come funzione dell'azione e viceversa. Variabili azione-angolo come nuove variabili hamiltoniane e la trasformazione completamente canonica che le determina. Esempi: oscillatore armonico, potenziale quartico, gas unidimensionale. Completa separabilità e variabili azione-angolo per sistemi con più gradi di libertà. Esempio: i moti kepleriani. Invarianti adiabatici. Invarianza dell'azione. Esempio: gas unidimensionale. Sistemi hamiltoniani e conservazione dei volumi nello spazio delle fasi: teorema di Liouville. Teorema di ricorrenza di Poincaré come importante conseguenza del teorema di Liouville.

[1] M.Serva, *Briciole di Meccanica Classica.* http://people.disim.univaq.it/∼serva/teaching/bricioleMC.pdf
[2] E. Olivieri, *Appunti di Meccanica Razionale.* UniTor, 1990.
[3] R. Esposito, *Appunti dalle lezioni di Meccanica Razionale.* Aracne, 1998.
[4] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag, 1989.
[5] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola, *Meccanica Hamiltoniana.* Università di Roma Tre, 2006-2007.
[6] G. Benettin, *Appunti per il corso di Meccanica Analitica.* Università di Padova, 2014-2015
[7] L. D. Landau e E. M. Lifšits, *Fisica Teorica 1 - Meccanica.* Editori Riuniti, University Press, 2009.