Meccanica Razionale - Meccanica Hamiltoniana
Corso di Laurea Triennale in Matematica - A.A. 2023/24
(2° anno, 2° semestre, 3 CFU)
Docente: Maurizio Serva

"Io fingo o suppongo che qualche corpo o punto si muova all'ingiù e all'insù con la nota proporzione et horizzontalmente con moto equabile. Quando questo sia io dico che seguirà tutto quello che ha detto il Galileo, et io ancora. Se poi le palle di piombo, di ferro, di pietra non osservano quella supposta proporzione, suo danno, noi diremo che non parliamo di esse." - Evangelista Torricelli (1608-1647)

Programma

- Parte I - Sistemi hamiltoniani.

  Derivazione delle equazioni di Hamilton dalle equazioni di Lagrange. Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton in assenza di vincoli e altri esempi con e senza dipendenza esplicita dal tempo. Definizione di parentesi di Poisson e parentesi di Poisson fondamentali. Integrali primi e parentesi di Poisson. Hamiltoniana come energia generalizzata del sistema, condizioni per la sua conservazione. Conservazione dei momenti cinetici coniugati alle variabili cicliche. Proprietà delle parentesi di Poisson. Identità di Jacobi ed eventuali ulteriori integrali primi. Hamiltoniane $H(q_1, p_1, .. q_l, p_l, g(q_{l+1}, p_{l+1}, .., q_n, p_n), t)$ che ammettono separazione di variabili e relativi integrali primi. Completa separabilità.

- Parte II - Trasformazioni canoniche.

  Definizione di trasformazione canonica e completamente canonica, esempi e controesempi. Invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali come condizione necessaria e sufficiente per la completa canonicità di una trasformazione indipendente dal tempo (con dimostrazione), esempi e controesempi. Invarianza delle equazioni di Lagrange per trasformazioni naturali e per l'aggiunta alla lagrangiana di una qualsiasi derivata totale $\frac{dF}{dt}(\mathbf{q}, t)$. Lagrangiana $\Lambda(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = p\dot{q} - H(q, p, t)$ con relative equazioni identiche alle equazioni di Hamilton. Trasformazioni che conservano l'identità tra equazioni di Lagrange e di Hamilton: criterio sufficiente per la canonicità basato sul confronto tra due forme differenziali (con dimostrazione). Funzioni generatrici delle trasformazioni canoniche, esempi vari. Il caso delle trasformazioni naturali.

- Parte III - Approfondimenti sui sistemi hamiltoniani.

  Moti periodici: librazioni e rotazioni. Definizione delle variabili azione-angolo per i moti periodici di sistemi a un grado di libertà. Energia come funzione dell'azione e viceversa. Variabili azione-angolo come nuove variabili hamiltoniane e la trasformazione completamente canonica che le determina. Esempi: oscillatore armonico, potenziale quartico, gas unidimensionale. Completa separabilità e variabili azione-angolo per sistemi con più gradi di libertà. Esempio: i moti kepleriani. Invarianti adiabatici. Invarianza dell'azione. Esempio: gas unidimensionale. Sistemi hamiltoniani e conservazione dei volumi nello spazio delle fasi: teorema di Liouville. Teorema di ricorrenza di Poincaré come importante conseguenza del teorema di Liouville.

---

[1] M.Serva, *Briciole di Meccanica Classica.* http://people.disim.univaq.it/~serva/teaching/bricioleMC.pdf
[2] E. Olivieri, *Appunti di Meccanica Razionale.* UniTor, 1990.
[3] R. Esposito, *Appunti dalle lezioni di Meccanica Razionale.* Aracne, 1998.
[4] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag, 1989.
[5] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola, *Meccanica Hamiltoniana.* Università di Roma Tre, 2006-2007.
[6] G. Benettin, *Appunti per il corso di Meccanica Analitica.* Università di Padova, 2014-2015
[7] L. D. Landau e E. M. Lifšits, *Fisica Teorica 1 - Meccanica.* Editori Riuniti, University Press, 2009.